

## Helburuak

Hamabostaldi honetan hau ikasiko duzu:

- Zenbaki errealak arrazional eta irrazionaletan sailkatzen.
- Zenbaki hamartarrak emandako ordena bateraino hurbiltzen.
- Hurbilketa baten errore-kota kalkulatzeko.
- Zuzenean zenbaki errealak irudikatzen.
- Zenbaki errearen tartek adierazten eta irudikatzen.
- Kalkuluak errazteko kalkulagailua erabiltzen.

Hasi baino lehen.

1. Zenbaki arrazionalak eta irrazionalak....orria 6  
Hamartar periodikoak  
Zatiki sortailea  
Zenbaki arrazionalak  
Zenbaki irrazionalak  
Zenbaki errealak
2. Zenbaki errealekin kalkulatz .....orria 9  
Hurbilketak  
Erroreen neurketa  
Notazio zientifikoa
3. Zuzen erreala .....orria 12  
Zenbaki errearen antolaketa  
Balio absolutua  
Tartekak

Praktikatzeko ariketak

Gehiago jakiteko

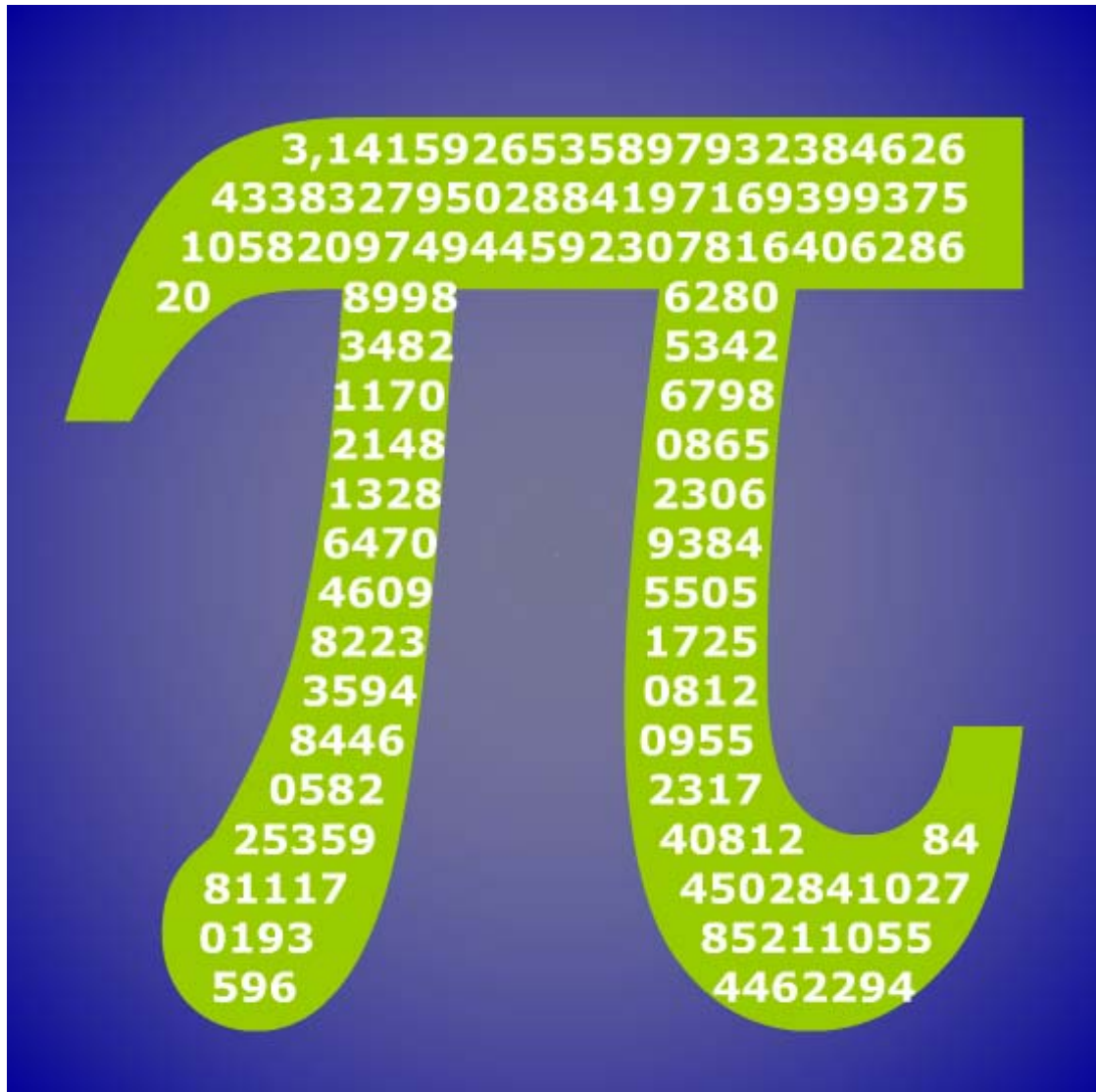
Laburpena

Autoebaluazioa

Tutoreari bidaltzeko jarduerak



## Hasi baino lehen



### Ikertu

Ziur aski noizbait egin duzu kalkuluren bat pi zenbakiarekin; adibidez, zirkunferentzia baten luzera edo zirkulu baten azalera kalkulatzea. Kalkulu hauetan honako balioak erabili dituzu: 3'14, 3'1416, 3'141592... Agian irakurri duzu egunkariaren batean pi zenbakiaren beste zifra bat aurkitu dela, edo jadanik pi zenbakiaren hainbat zifra zehazki ezagutzen direla. Aurreko hau guztia nahasi samarra gertatzen da. Aurreko kopuruetatik, zein da benetako pi zenbakia? Nola da posible horiei guztiei pi deitzea, argi dagoenean desberdinak direla? Nola da posible oraindik pi-ren zifren bila aritzea, antzinatek erabiltzen ari bagara?

Saia zaitetz galdera hauen erantzuna aurkitzen. Orain lortzen ez baduzu, saia zaitetz berriro gai hau sakontasunean ikusi eta gero. Proposamena amaitzeko, horra hor beste galdera bat: zein da edo zein izan daiteke pi zenbakiaren azken zifra?

# Zenbaki errealak

## 1. Zenbaki arrazionalak eta irrazionalak

### Hamartar periodikoak

Aurreko ikasturteetan ikusi duzu zatikia bi zenbaki osoen arteko zatidura dela. Bi zenbaki horien zatiketak sortzen du **adierazpide hamartarra**, periodikoki errepikatzen den zenbaki talde batez osatua. Horri **periodoa** esaten zaio eta hiru motatakoa izan daiteke:

- Hamartar **periodiko hutsa**.  
Mota honetako zenbaki baten irudikapena halakoa da:  
 $\frac{12}{11} = 1,090909... = 1,0\overline{9}$ ; Periodoa 09 da.
- Hamartar **periodiko nahasia**.  
 $\frac{31}{15} = 2,06666... = 2,0\overline{6}$ ; Periodoa 6 da.
- Hamartar **zehatza**.  
 $\frac{1}{8} = 0,125000... = 0,125$

### Zatiki sortzailea

Orain ikusiko dugunez, hamartar periodiko guztiak irudika daitezke zatiki moduan, aipatu hamartar horren zatiki sortzailea deituko duguna.

Kasu hauetan formula aplikatzea ez da beharrezkoa eta jarraian azaltzen den moduan egitea errazagoa da:

- Hamartar zehatza.  
Kakotsa kentzen da eta zatitzen da zati unitatea gehi dituen zifra hamartar esangarriak adina zero.
- Hamartar periodiko garbia.  
Zenbakitzailan idazten dugu zati osoa eta lehen periodoa amaitu arteko zifrak, zati osoa kenduta, eta izendatzailean periodoak dauzkan zifra beste bederatzi.
- Hamartar periodiko nahasia.  
Zenbakitzailan idazten da zati osoa eta jarraian lehen periodoa amaitu arteko zifrak, periodoa hasteko zifrak eta zati osoa kenduta, eta izendatzailean periodoak dauzkan zifrak beste bederatzi eta jarraian kakotsa eta periodoaren hasierako arteko zifra beste zero.

$$\begin{array}{r} 12 \overline{) 7} \\ 50 \phantom{0} \\ 10 \phantom{00} \\ 30 \phantom{000} \\ 20 \phantom{0000} \\ 60 \phantom{00000} \\ 40 \phantom{000000} \\ 50 \phantom{0000000} \\ 10 \phantom{00000000} \\ 30 \phantom{000000000} \\ 2 \phantom{0000000000} \end{array} \quad \begin{array}{l} 7 \\ 1,714285714 \\ 12 \\ 7 \end{array}$$

Hondarra zatitzailea baino txikiagoa da beti, gero gehienez ere zatitzailearen berdina den urrats kopuruan, hondarra errepikatu egingo da eta zatiduraren zifra hamartarrak ere bai.

- Hamartar zehatza.  $x=71,52$   
2 zifra hamartarrak  
Bider  $10^2$  egiten da

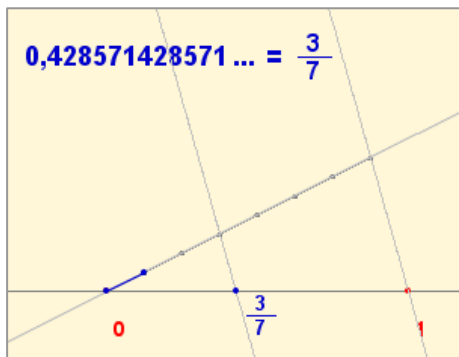
$$\begin{array}{r} 100x=7152 \\ x = \frac{7152}{100} \end{array}$$

- Hamartar periodiko garbia.  
 $x=853,11...$   
Periodoa zifra batekin  
Bider 10 egiten da

$$\begin{array}{r} 10x=8531,11... \\ \text{Kenketa egiten: } 9x=8531-853 \\ x = \frac{7678}{9} \end{array}$$

- Hamartar periodiko nahasia.  
 $x=4,9368368...$   
Zifra 1 periodoa eta komaren artean  
Bider 10 egiten da

$$\begin{array}{r} 10x=49,368368... \\ \text{Periodoa 3 zifrekin} \\ \text{Bider } 10^3 \text{ egiten da} \\ 10000x=49368,368... \\ \text{Kenketa egiten: } 9990x=49368-49 \\ x = \frac{49319}{9990} \end{array}$$



## $\sqrt{2}$ ez da hamartar periodikoa

Hala izango balitz zatiki sinplifikaezin moduan idatz zitekeen:

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s}$$

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_r}{q_1 \cdot q_2 \cdot \dots \cdot q_s}$$

$p_1, p_2, \dots$ ,  $n$ -ren faktore lehenak izanik;  $q_1, q_2, \dots$   $m$ -renak eta "p" guztiak "q" guztien desberdinak izanik.

Berredura eginez:

$$2 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_r^2}{q_1^2 \cdot q_2^2 \cdot \dots \cdot q_s^2} \Rightarrow n^2 = 2m^2$$

$n$  2gatik zatigarria da,  $n=2t$ ,

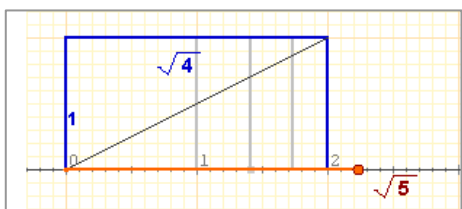
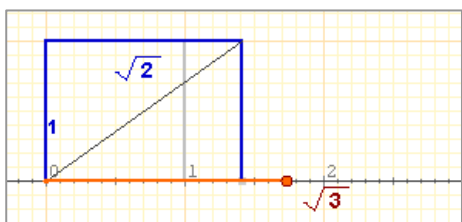
$$\text{beraz } \sqrt{2} = \frac{2t}{m}$$

Berriz ere berredura eginez:

$$2m^2 = 4t^2 \Rightarrow m^2 = 2t^2$$

$m$  ere 2gatik zatigarria dela ondorioztatzen da, beraz,  $m/n$  zatiki sinplifikaezina izatea kontraesana da.

Ondorioz  $\sqrt{2}$  zatiki moduan ezin da idatz eta ez da hamartar periodikoa.



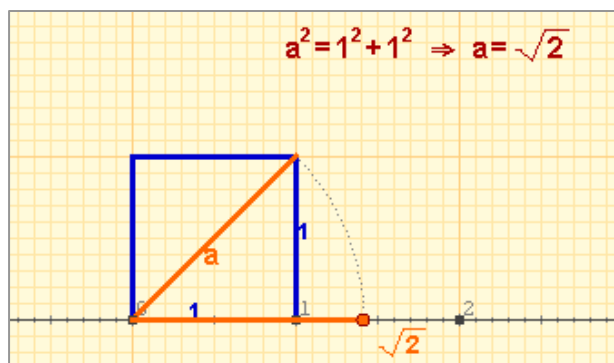
## Zenbaki arrazionalak

Hamartar zehatzek, periodiko hutsek eta periodiko nahasiek badute antzekotasun bat, alegia, zati hamartarra azkenean periodiko bihurtzen dela (horregatik haiei guztiei **hamartar periodiko** esango diegu). Gainera, ikusi dugunez, zatiki moduan edo arrazoi moduan idatz daitezke; horregatik, hemendik aurrera hamartar periodikoei **zenbaki arrazional** deituko diegu.

Atal honetan, zenbaki arrazionalak zuzen baten gainean modu ordenatuan, zenbaki bakoitzari leerroaren puntu bana emanez, nola jarri ikusiko dugu.

## Zenbaki irrazionalak

Frogatu berri dugu, beraz, badaudela zatiki moduan idatzi ezin diren zenbakiak, edo, bestela esanda, horien zati hamartarra ez dela periodikoa. Hemendik aurrera zenbaki horiei honela deituko zaie: **zenbaki irrazionalak**.



## Zenbaki errealak

Aurreko eskemari jarraituz, ondoko agertokian ikus dezakezu nola irudika daitezkeen zuzen batean erro karratuetatik datozen zenbaki irrazionalak. Hala ere, zenbaki arrazional guztiak ezin dira irudikatu hau bezalako teknika erraz baten bidez eta hurbilketa metodoetara jo behar dugu lortzeko.

Orain, garrantzizkoena zera da, bi zenbaki-multzo ditugula: hamartar periodikoak edo **arrazionalak** eta hamartar ez periodikoak edo **irrazionalak**. Bi multzo hauen batura **zenbaki erreale** multzoa da.

## Ariketen emaitzak

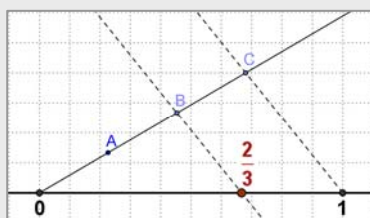
1. Kalkulatu zatiki sortailea:

a) 2,375       $1000x=2375$        $\Rightarrow x = \frac{2375}{1000} = \frac{19}{8}$

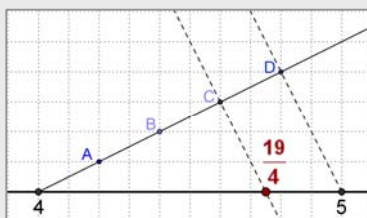
b) 43,666...       $x = 43,\overline{6}$   
 $10x = 436,\overline{6}$        $9x = 436 - 43 \Rightarrow x = \frac{393}{9} = \frac{131}{3}$

c) 4,3666...       $x = 4,\overline{36}$   
 $10x = 43,\overline{6}$   
 $100x = 436,\overline{6}$        $90x = 436 - 43 \Rightarrow x = \frac{393}{90} = \frac{131}{30}$

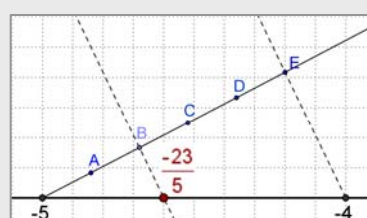
2. Representa en la recta:



Segmentua (0,1) 3 zati berdinetan zatitzen da eta 2 hartzen dira.



$19/4 = 4 + 3/4$ enez, segmentua (4,5) 4 zati berdinetan zatitzen da eta 3 hartzen dira.



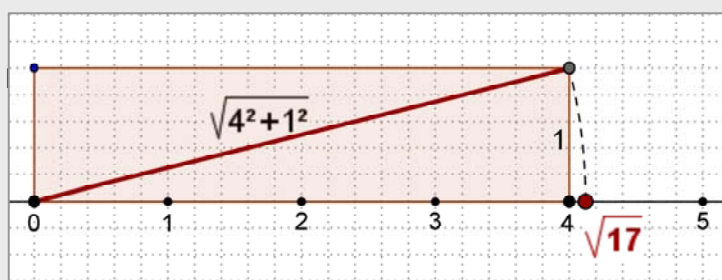
$-23/5 = -5 + 2/5$ enez, segmentua (-5,-4) 5 zati berdinetan zatitzen da eta 2 hartzen dira.

3. Zehaztu zein motako hamartarrak diren ondokoak:

a)  $\frac{92}{73}$     b)  $\frac{57}{22}$     c)  $\frac{27}{36}$

a) Periodiko purua    b) Periodiko mistoa    c) Zehatza

4.



$$17 = 16 + 1 = 4^2 + 1^2$$

Oinarria 4 unitate eta altura unitate 1 den lauki zuzen bat marraztea nahikoa da, jatorrizkoa oinarritzat hartuz.

Diagonalaren neurria  $\sqrt{17}$  da, konpasarekin neurria hartu eta graduatutako zuzenaren gainean dagokion puntua markatzen da.

5. Ondoko zenbakiak arrazionalak edo irrazionalak diren erabaki:

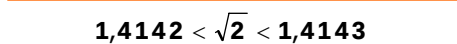
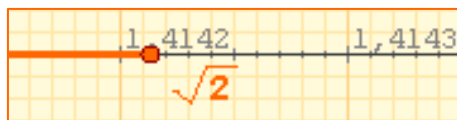
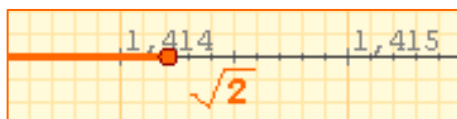
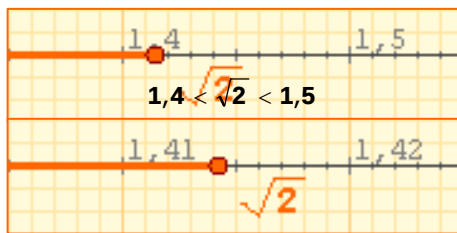
-5, 0,  $\pi/2$ ,  $\sqrt{16}$ ,  $7/3$ , 2,313131...,  $\sqrt{15}$ , 1,01001000100001..., -4/5, 4,65

Zenbaki osoak eta hamartar zehatzak edo periodikoak arrazionalak dira:

-5, 0,  $\sqrt{16} = 4$ ,  $7/3$ , -4/5 y 4,65

Son irracionales:  $\pi/2$ ,  $\sqrt{15}$ , 1,01001000100001...

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095...$$



| MOZKETA    | BOROBILTZA |
|------------|------------|
| 1,4        | 1,4        |
| 1,41       | 1,41       |
| 1,414      | 1,414      |
| 1,4142     | 1,4142     |
| 1,41421    | 1,41421    |
| 1,414213   | 1,414214   |
| 1,4142135  | 1,4142136  |
| 1,41421356 | 1,41421356 |

$$\frac{506}{13} = 38,923076923076...$$

4 zifrekin hurbiltzen dugu:

• Ordezkatuz: **38,9230**

**Errore absolutua:**

$$|38,9230 - 38,923076923076...| = 0,000076923076...$$

**Errore erlatiboa:**

$$\frac{0,0000769230...}{38,92307692...} = 0,00000197 = 0,000197\%$$

• Borobilduz: **38,9231**

**Errore absolutua:**

$$|38,9231 - 38,9230769230...| = 0,000023076923...$$

**Errore erlatiboa:**

$$\frac{0,000023076923...}{38,92307692...} = 0,00000059 = 0,000059\%$$

## 2. Zenbaki errealekin kalkulatz

### Hurbilketak

Frogatu duzunez, zenbaki errealek zifra hamartar infinituak dituzte, horregatik, orokorrean, ez da posible beren balio zehatzik ematea. Zenbait kasutan, adibidez, arrazionalekin (zatiki sortaileaz) eta errotzailleekin, bada posible modu zehatzean irudikatzea. Baina beste kasu askotan ( $\pi$  zenbakiarekin edo  $e$  zenbakiarekin) hau ez da posible.

Problema batean zifra hamartar infinituak dituen zenbaki bat erabili behar dugunean, praktikan horren balio hurbila erabiltzen dugu, emaitza onargarria lortzeko aukera ematen diguna, zehatza ez bada ere.

Hurbilketa bat txikiagora izango da zenbaki zehatza baino txikiagoa baldin bada, eta handiagora handiagoa baldin bada.

- ✓ Hamartar batean lehen  $n$  hamartar zifrekin gelditzen baldin bagara zifra esangarriekin **mozketa** bat egin dugula esaten dugu.
- ✓  $n$  zifra esangarriak **borobildu** egiten ditugu  $n$  zifrekin mozten baditugu,  $n$ . zifra 5 baino txikiagoa bada berdin utziz, eta bestela azken zifra unitate batez handituz.

Ikus ezkerreko adibideak hurbilketa desberdinekin  $\sqrt{2}$ .

### Erroreen neurketa

Ikusi dugu, zenbaki errealekin kalkuluak egiteko, askotan hurbilketak erabili behar ditugula. Orduan zalantza sortzen zaigu, egindako hurbilketa zenbateraino den baliagarria. Horretarako definitzen dugu:

- ✓ **Errore absolutua:** Balio zehatzaren eta balio hurbilaren arteko kenduraren balio absolutua da.
- ✓ **Errore erlatiboa:** Errore absolutua eta balio zehatzaren arteko zatidura da. Biderkatuta bider ehun errore portzentajea da.

Balio zehatza ezezaguna denean **errore-kota** deiturikoa erabiltzen da, balio absolutua har dezakeen balio handiena da. Balio honen magnitudeari esker ziur jakin genezake zenbat hamartar zifra diren zuzenak.



# Zenbaki errealak

## Kalkulua hurbilketekin

Kalkulua hurbilketekin neurriaren arazoarekin lotuta dago. cm-ak eta mm-ak dituen erregela graduatuarekin luzera neurtzean bi hurbilketa lortzen ditugu, bata txikiagora eta bestea handiagora, eta neurritzat balio hurbilena emango dugu edo probableena iruditzen zaiguna. Errore-kota hurbilketa hauen arteko diferentzia izango da edo izan daitekeen balioa hartuz gero, erdia.

Honela lortutako neurriekin eragiketak eginez gero:

- ✓ Bi hurbilketaren edo gehiagoren arteko batuketaren edo **kenketaren errore absolutua** hurbilketa guztien errore absolutuen batuketa da.
- ✓ Bi hurbilketaren edo gehiagoren arteko produktuaren edo **zatiduraren errore erlatiboa** hurbilketa bakoitzaren errore erlatiboen batuketa da.

Txikiagorako hurbilketa: 3,20  
Handiagorako hurbilketa: 3,30  
Baliorik probableena: 3,25  
Errore-kota:  $3,25 - 3,20 = 0,05$



Oinarria:  $3,4 \pm 0,1$   
Errore erlatiboa:  $0,1/3,4 = 0,03$   
Altuera:  $4,5 \pm 0,1$   
Errore erlatiboa:  $0,1/4,5 = 0,02$   
Perimetroa:  $15,8 \pm 0,4$   
Azalera:  $15,3 \pm (15,3 \cdot 0,05) = 15,3 \pm 0,8$

## Con la calculadora

Kalkulagailuan zenbakiak notazio zientifikoa, esaterako:

►  $9,0043 \cdot 10^{13}$

Tekleatu 9 . 0043 EXP 13

Azalduko da:  $9.0043^{13}$

►  $6,0743 \cdot 10^{-18}$

Tekleatu 6 . 0743 EXP +/- 18

Azalduko da:  $6.0743^{-18}$

Sartzen baduzu:

►  $900,43 \cdot 10^{13}$

Tekleatu 900 . 43 EXP 13

Azalduko da:  $900.43^{13}$

Eta sakatuz = zenbakia notazio zientifikoa aterako da  
:  $9.0043^{15}$

## Notazio zientifikoa

Hurbilketek interes berezia dute zenbaki oso handiekin edo 0tik oso hurbil daudenekin lan egiten denean. Kasu honetan, notazio berezia erabiltzen dugu, notazio zientifikoa deritzona. Zientzia esparruan gehien erabiltzen dena delako deitzen zaio horrela.

Notazio zientifikoa irudikaturiko zenbakia halakoa izaten da:  $x \cdot 10^n$ , x 1 baino handiagoa eta 10 baino txikiagoa den hamartarra izanik, hau da, bere zati osoan .

Notazio zientifikoa dauden zenbakiekin eragiketak egiteko potentzien ezaugarriak aplikatzea nahikoa da.



Andromeda galaxiak 100000 argi-urteko diametroa du eta 2000000 argi-urteko distantzia dago, zein da bere diametroa eta zenbat km-ra dago?

Zenbat oxigeno atomo sartzen dira bakteria batean?

$$\frac{1,59 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-7}} = 1,325 \cdot 10^4$$

Argiaren abiadura: 300000 km/sg  
Urte batean:

$$300000 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 = 9.460.800.000.000 \text{ km} = 9,4608 \cdot 10^{12}$$

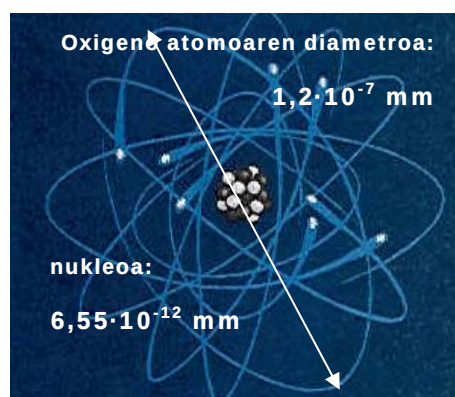
Zenbat oxigeno nukleo sartzen dira atomo batean?

$$\frac{1,2 \cdot 10^{-7}}{6,55 \cdot 10^{-12}} = 0,1832 \cdot 10^5$$

Galaxiaren diametroa (km):  
 $10^5 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 9,4608 \cdot 10^{17}$

Distantzia (km):  
 $2 \cdot 10^6 \cdot 9,4608 \cdot 10^{12} = 1,8922 \cdot 10^{19}$

notazio zientifikoa  
 $= 1,832 \cdot 10^4$





## Ariketen emaitzak

5. Zirkunferentzia baten erradioa 3,96 metrokoa da. Kalkulagailua eta ematen duen  $\pi$  balioa erabiliz kalkulatu:

6.

- a) Zirkunferentziaren luzera, emaitza zentrimetrotan moztuz.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 24,88141381...m = 2488 \text{ cm}$$

- b) Zirkunferentziaren luzera, emaitza zentrimetrotan borobilduz.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 24,88141381...m = 2488 \text{ cm}$$

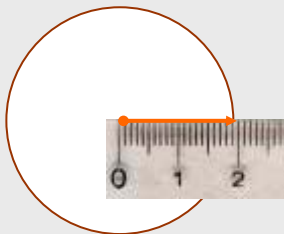
- c) Zirkuluaren area cm<sup>2</sup>-ra moztuz.

$$A = \pi \cdot r^2 = 49,26519935... m^2 = 492651 \text{ cm}^2$$

- d) Zirkuluaren area cm<sup>2</sup>-ra borobilduz.

$$A = \pi \cdot r^2 = 49,26519935... m^2 = 492652 \text{ cm}^2$$

7. Zirkunferentziaren luzera eta irudiaren zirkuluaren azalera kalkulatu, eta bakoitzaren errore-kotak ere bai.



Erradioa: 1,9 cm 0,1 cm baino gutxiagoko erroreaz

$\pi$  baliozat ondokoak hartzen ditugu: 3,1

$\pi$  neurrian errore erlatiboa:

Erradioaren neurrian errore erlatiboa: 0,1/1,9

Luzera =  $2 \cdot 3,1 \cdot 1,9 = 11,8$  eta errore erlatiboa = 0,08

Luzera =  $11,8 \pm (11,8 \cdot 0,08) = 11,8 \pm 0,9$

Azalera =  $3,1 \cdot 1,9 \cdot 1,9 = 11,2$  eta errore erlatiboa 0,14

Azalera =  $11,2 \pm 0,14 \cdot 11,2 = 11,2 \pm 1,6$

8. Trafikoko radarrak autoen abiadura neurtzen duten kaleetan eta errepideetan. Indarrean dagoen legeak kontuan hartzen du neurketetan erroreak gertatzen direla eta horregatik %10eko errore-marjina ematen du (edo 0,10eko errore erlatiboa). Hau kontuan hartuta kalkulatu kotxe bat legea hautsi gabe gehienez zein abiaduratan joan daitekeen ondoko kasuetan:

- a) Autobidea, gehieneko abiadura-muga 120 km/h:  $120 \cdot 0,10 = 132$

- b) Errepidea, gehieneko abiadura-muga 90 km/h:  $90 + 0,10 \cdot 90 = 99 \text{ km/h}$

- c) Herri barruko bidea, gehieneko abiadura-muga 50 km/h:  $50 + 0,10 \cdot 50 = 55 \text{ km/h}$

9. Idatzi notazio zientifikoa edo notazio hamartarrean hurrenez hurren:

a)  $0,000000002145 = 2,145 \cdot 10^{-9}$

b)  $3,589 \cdot 10^9 = 3589000000$

b)  $1523000000000 = 1,523 \cdot 10^{12}$

d)  $5,267 \cdot 10^{-5} = 0,00005267$

10. Gaiaren datuekin eta beharrezkoa bada kalkulagailua erabiliz, aztertu Andromeda galaxiaren diametroan gurea bezalako zenbat eguzki-sistema sartuko liratekeen:

Andromedaren diametroa:  $9,4608 \cdot 10^{17}$  Eguzki-sistemaren diametroa:  $9,0086 \cdot 10^9$

$$\frac{9,4608 \cdot 10^{17}}{9,0086 \cdot 10^9} = 1,0502 \cdot 10^8 \cong 105020000 \text{ 100 milioi sistema baino gehiago.}$$

11. Gaiaren datuekin eta beharrezkoa bada kalkulagailua erabiliz, kalkulatu oxigeno atomo baten bolumena mm<sup>3</sup>tan esfera bat dela kontuan hartuz.

Oxigeno atomoaren erradioa:  $6 \cdot 10^{-6} \text{ mm}$

$$\text{Bolumena} = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot 6^3 \cdot (10^{-6})^3 = 904,78 \cdot 10^{-18} = 9,0478 \cdot 10^{-16}$$

# Zenbaki errealak

## 4. Zuzen erreala

### Zenbaki errealen antolaketa

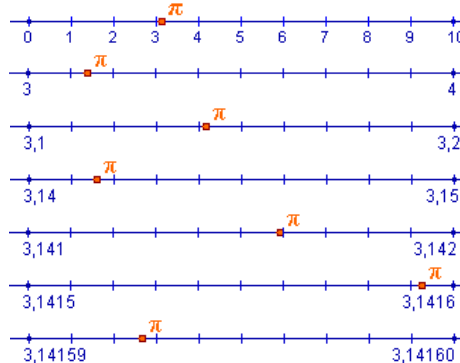
Edozein zenbaki erreal zuzen baten puntu baten bidez irudikatzen da eta, era berean, zuzenaren edozein punturi zenbaki erreal bat dagokio.

Ikus grafikoan  $\pi$  bezalako zenbaki irrazional bati zuzeneko puntu bat nola esleitu sartutako tarte segida baten bitartez.

Honi esker zenbaki errealen multzoan ordena-erlazio bat definitzen dugu:

- ✓ Bi zenbaki erreal emanda, **a** eta **b**, **a b baino txikiagoa dela** esango dugu, **a < b**, irudikatzen dugunean **a b**-ren ezker aldean baldin bada.
- ✓ Halaber esan dezakegu zerotik eskuinaldera dauden zenbakiak **positiboak** direla eta ezker aldean daudenak **negatiboak**, eta **a b baino txikiagoa dela b - a** kendura positiboa baldin bada.

$$\pi = 3,141592353589793...$$

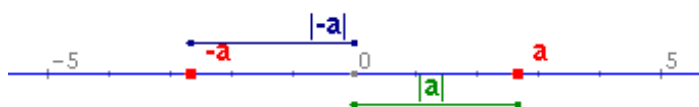


Era honetara  $\pi$  irudikatzen dakigun eta gero eta hurbilago dauden bi zenbaki arrazionalen artean mugatu dezakegu.

### Balio absolutua eta distantziak

Puntu eta zenbakien arteko baliokidetasunak kalkulari kontzeptu geometrikoak aplikatzeko aukera ematen du, bereziki distantziaren ideia zenbaki baten balio absolutuaren bidez.

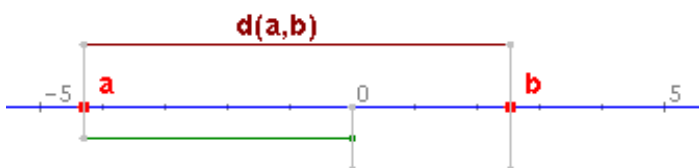
- ✓ **a** zenbaki errealaren **balio absolutua** **a** eta **-a** zenbakirik handienari esaten zaio. **a**-ren balio absolutua horrela irudikatzen da: **|a|**.



Zenbaki baten balio absolutuak zenbaki horren eta zeroren arteko distantzia adierazten du. Ideia hau orokortu egin dezakegu:

- ✓ Bi zenbaki errealen arteko **distantzia**, **a** eta **b**, esaten zaio haien kenduraren balio absolutuari:

$$d(a,b) = |b-a| = |a-b|$$



#### Balio absolutuaren ezaugarriak

- 1)  $|a| \geq 0$
- 2)  $|a| = |-a|$
- 3)  $|a+b| \leq |a| + |b|$
- 4)  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 5)  $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$

$$\begin{aligned} a &= 2,6828 & |a| &= 2,6828 \\ -a &= -2,6828 & |-a| &= 2,6828 \end{aligned}$$

a-k eta b-k zeinu berdina baldin badute, distantzia balio absolutuen kenketa da eta, zeinua desberdina bada, batuketa.

$$\begin{aligned} a &= -4,2946 & |a| &= 4,2946 \\ b &= 2,5447 & |b| &= 2,5447 \\ d(a,b) &= 6,8393 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= 3,0054 & |a| &= 3,0054 \\ b &= 4,2861 & |b| &= 4,2861 \\ d(a,b) &= 1,2807 \end{aligned}$$

## Tarte itxia:

Muturrekoak tartearen barruan daude.



## Tarte irekia:

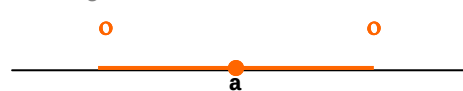
Muturrekoak ez daude tartearen barruan.



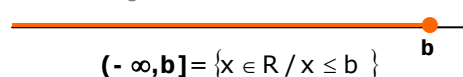
**Tarte erdi irekia:** Muturreko bat tartearen barrukoa da eta bestea ez.



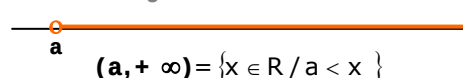
a-ren ingurune simetrikoa:



**Goitik mugatutako zuzenerdia**



**Behetik mugatutako zuzenerdia**



## Tarteak: segmentuak eta zuzenerdiak

Tartearen kontzeptua segmentu eta zuzenerdiaren kontzeptu geometrikoei lotzen zaie: tarte mugatua segmentuaren baliokidea da eta tarte mugagabea zuzenerdiaren baliokidea.

✓ **a** eta **b** bi zenbaki erreal izanik, **a** eta **b** **muturrentako tarte**a esaten zaio bien artean dagoen zenbaki errealen multzoari.

✓ Tartearen luzera  $(a, b) = |b - a|$  distantzia da

**Tarte mugatueta**n, muturrekoak tartekoak diren ala ez kontuan hartuz, tarte itxiak, irekiak eta erdi-irekiak daude (ezkerretik edo eskuinetik).

a puntuaren inguruan tarte ireki bat egiten bada **a** eta **r** **erradioa duen inguru simetrikoa** lortzen da, "a"-ra distantzia **r** baino txikiagoa den zenbaki errealen multzoa.

**Tarte mugatugabea** emandako zenbaki baten behe-bornea baino handiagoz (edo  $\geq$ ), edo goi-bornea baino txikiagoz (edo  $\leq$ ) osatutako multzoa da. Zuzenerdi batez irudikatzen dira eta luzera infinitua da.

## Ariketen emaitzak

1. Ordenatu txikitik handira.

a)  $5,97509 \cdot 10^8$    b)  $6,10314 \cdot 10^{-6}$    c)  $\frac{-8243924}{5560}$    d)  $\frac{5952091}{4605}$    e)  $\sqrt{30694}$    f)  $-\sqrt{6320}$

$$c < f < b < e < d < a$$

2. Zirkunferentzia baten erradioak 4 m. ditu. Kalkulatu luzera.

2.1. Emaizta moztu lehenengo cm-ra eta gero m-ra.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 24,88141381...m = 2488 \text{ cm} = 24 \text{ m}$$

2.2. Emaizta borobildu lehenengo cm-ra eta gero m-ra.

$$L = 2 \cdot \pi \cdot r = 24,88141381...m = 2488 \text{ cm} = 25 \text{ m}$$

3. Kalkulatu  $a = -3$  eta  $b = 5$  zenbakien balio absolutua eta bien arteko distantzia.

$$|a| = 3, |b| = 5, \text{dist}(a, b) = |b - a| = |5 - (-3)| = |8| = 8$$

4. Kalkulatu  $|a + b|$   $|a - b|$   $|a \cdot b|$  eta  $|a/b|$

$$|a + b| = |-3 + 5| = |2| = 2; |a - b| = |-3 - 5| = |-8| = 8; |a \cdot b| = |-3 \cdot 5| = |-15| = 15; |a/b| = |-3/5| = 3/5$$

5. Adierazi kasu bakoitzean zein puntu dauden tartearen barruan:

5.1. Tarte  $(-74, -52]$ . Puntuak: a)  $-53$    b)  $-74$    c)  $11$    **Emaizta: bat ere ez**

5.2. Tarte  $(-\infty, 75]$ . Puntuak: a)  $-32$    b)  $-75$    c)  $76$    **Emaizta: a eta b.**

# Zenbaki errealak



## Praktikatze

1. Ondoko zenbakiak emanez:

$A=2,7$   $B=3,292929...$   $C=0,01030303...$

Kalkulatu  $A+B$ ,  $C-A$  eta  $A \cdot C$ -ren balio zehatzak. ( $A$ ,  $B$  eta  $C$ -ren zatiki sortaileak kalkulatu behar dituzu eta kenketa egin).

2.  $7,4833147735....$   $\sqrt{56}$  ren balio zehatza dela kontuan hartuz, idatzi hurbilketak txikiagora, handiagora eta borobiltzeak lehen eta bigarren ordenakoak (hamarrenak eta ehunenak, hurrenez hurren).

3. Behean azaltzen den zinta metrikoak cm erdira arteko zatiketak ditu. Hagatxo bat neurtzeko erabiltzen dugu eta bertan azaltzen den balioa lortzen dugu. Zein balio zehatzen artean dago luzera erreala, kontuan hartuz balio hori dela: a) txikiagora; b) handiagora; c) cm-tara borobildua.

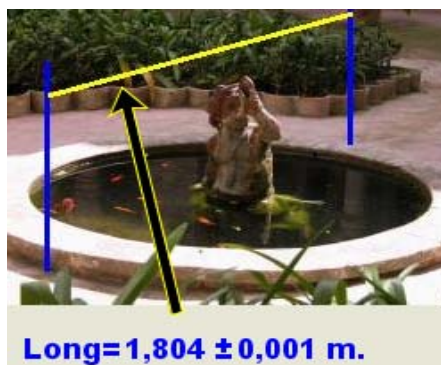


Hurbilketak zenbaki osoekin ere erabil daitezke. Ideia hau orokortzeko zifra esangarriak kontzeptua erabiliko dugu: "N zenbaki bat  $P$  beste zenbaki baten balio hurbildua bada,  $N$  zenbakiak  $n$  zifra esangarri dituela esango dugu,  $N$  zenbakiaren lehen  $n$  zifrak eta  $P$  zenbakiaren  $n$  zifrak bat etorriz gero. (Ez dira zifra esangarritzat onartuko koma hamartarra kokatzea helburu bakartzat duten zeroak)". Aurreko definizioa nahiko intuitiboa da baina ez da guztiz zuzena izaten beti, eta horregatik gehiago behar dugu: "N zenbakiak  $n$  zifra esangarri dituela esango dugu  $N$  zenbakiaren lehen  $n$  zifrekin osatutako zenbakiaren eta  $P$  zenbakiaren lehen  $n$  zifrekin osatutakoaren arteko desberdintasuna  $0,5$ " baino txikiagoa baldin bada (egonez gero, koma hamartarrak kenduz).

4. Hiri batean 1579000 biztanle daudela eta kopuru horren lehen 4 zifrak esangarriak

direla esaten digute. Zein balioen artean dago benetan hiri horretako populazioa?

5.  $X=6,235$  eta  $Y=92,88$  balioak  $A$  eta  $B$  bi zenbaki erreal ezezagunen txikiagorako hurbilketak dira. Bilatu zein balio zehatzen artean dauden  $A+B$  eta  $A \cdot B$  eta emaitzak zein zehaztasunekin eman daitezkeen.
6. Obra batzuk direla-eta irudian agertzen den iturria sare metaliko babesle batekin estali nahi da. mm-tan graduatutako flexometroa erabiliz adierazitako diametroaren luzera lortzen da. Kalkulatu sare metalikoaren luzera pi zenbakia eta hamartar kopuru egokia erabiliz.



7. Jupiter eta Eguzkiaren arteko batez besteko distantzia  $7,7833 \cdot 10^8$  km da. Zifra guztiak esangarriak dira eta planetak eguzkiaren inguruan duen orbita zirkularra dela jotzen dugu. Kalkulatu: a) Errore-kota km-tan; b) Planetak marrazten duen zirkuluaren azalera.

E erreferentziako multzo jakin baten  $A$  eta  $B$  bi azpimultzoak emanik, bien ebakidura,  $A \cap B$ , bien artean dituzten elementu komun multzoa da; bien arteko bildura,  $A \cup B$ ,  $A$ -ko eta  $B$ -ko elementu guztiek osatzen duten multzoa da; bien arteko diferentzia,  $A - B$ ,  $B$ -koak ez diren  $A$ -ko elementu guztiek osatzen duten multzoa da.  $A$ -ren osagarria,  $-A$ ,  $A$ -koak ez diren erreferentziako multzoko elementu guztiek osatzen duten multzoa da.

8. Zehaztu  $A \cap B$ ,  $A \cup B$ ,  $A - B$  eta  $-A$  multzoak ondoko kasuetan:

- a.  $A = [-11, -9]$   $B = (-1, 6)$   
b.  $A = [-5, 5]$   $B = (3, 4)$   
c.  $A = [-2, 7]$   $B = (-2, 6)$



## Gehiago jakiteko

### pi zenbakiari buruzko galderak

Gaia aurkeztean  $\pi$ -ren balioa  $3'14$ ,  $3'1416$ , ... zela aipatzen zen eta honen inguruan galdera batzuk zeuden:

Aurreko kopuruetatik, zein da benetako  $\pi$  zenbakia?

Gaian zehar ikusi dugun bezala, benetan aurreko kopuruetatik bat ere ez da  $\pi$ -ren balio zehatza, zenbakirako hurbilketak baino ez dira, eta hamartar gehiago edo gutxiago jartzea neurketan behar dugun zehaztasunaren arabera izango da.

Nola da posible horiei guztiei  $\pi$  deitzea, argi dagoenean desberdinak direla?

Aurreko kopuru guztiei deitzen zaie  $\pi$  arrazoi sinple batengatik, ezinezkoa delako zenbaki irrazional gehienek balio zehatza erabiltzea, horregatik nahikoa zaigu balio horren hurbilketak ematea. Lehen esan dugun bezala, zifra hamartarren kopurua neurketan behar dugun zehaztasunaren arabera izango da, eta, adibidez, laugarren hamartarra 6 izatea,  $3'1416$ , eta 5,  $3'14159$ , hurbilketa borobiltzeaz lortzen delako ematen da, eta beraz lau zifra hamartarrez  $3'1416$  balio zehatzera  $3'1415$  baino gehiago hurbiltzen delako.

Zenbait zenbaki irrazional, 2ren erro karratua, adibidez, modu zehatzean adieraz daitezke, baina kopuru hori praktikan neurtu nahi badugu, nahi dugun zehaztasunaz balio hurbildua ematea, ezin dugu besterik egin.

Nola da posible oraindik  $\pi$ -ren zifrak aurkitzen ari direla, antzinatek erabiltzen ari bagara?

Zenbaki irrazionalek zifra hamartar infinituak dituzte, modu periodikoan errepikatzen ez direnak. Zifra hauek aurkitzeko badaude prozedura desberdinak edo algoritmoak. Algoritmo hauetako batzuk erlatiboki errazak izaten dira, 2ren erro karratuaren zifra hamartarrak lortzeko erabiltzen dena, adibidez (antzina lehen hezkuntzan irakasten zena); Beste batzuk, aldiz, izugarri luzeak eta konplexuak izaten dira.  $\pi$  zenbakia bigarren talde honetan dago. Gaur egun  $\pi$ -ren zifra hamartarrak kalkulatzeko algoritmoak ordenagailu boteretsuekin abiarazten dira.

Zein da edo zein izan daiteke  $\pi$  zenbakiaren azken zifra?

Lehen esan dugun bezala, zenbaki irrazionalek zifra hamartar infinituak dituzte, beraz, ez da existitzen  $\pi$  zenbakiaren azken zifrarik. Gainera, zifrak modu periodikoan errepikatzen ez direnez, ezin da aldeztu aurretik esan zein zifrak beteko duen leku zehatz bat, kalkulua lortu arte.

# Zenbaki errealak



## Gogora ezazu garrantzitsuena

### Zenbaki errealak

Zenbaki errealen multzoa zenbaki **arrazionalak** eta zenbaki **irrazionalak** osatzen dute.

- **Zenbaki arrazionala** zatikia da, haren baliokide guztiekin. Edozein zenbaki arrazional **hamartar periodiko** gisa adieraz daiteke, eta alderantziz.
- Zenbaki **irrazionala** zenbaki hamartar mugagabe ez periodikoa da.

### Zenbaki erreal baten hurbilketak

Praktikan hurbilketak erabili behar dira, zifra hamartar infinituak dituzten zenbakiekin lan egiten dugunean. **Txikiagorako** eta **handiagorako** hurbilketak erabiltzen ditugu, **mozketak** eta **borobiltzeak**.

Zenbaki erreal guztiak adieraz daitezke zenbaki hamartarren bi sekuentzia gisa, hauek txikiagorako eta handiagorako hurbilketak dira.

- **Errore absolutua** balio zehatza eta balio hurbilaren arteko kendura positiboa da.
- **Errore erlatiboa** balio hurbila eta balio zehatzaren arteko zatidura da. %-tan adierazi ohi da.
- Hurbilketa baten **errore-kota** gehienezko errore absolutu posiblea da.

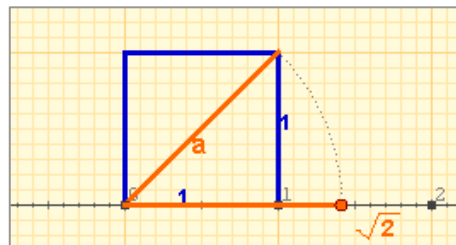
### Zuzen erreala

A zenbaki baten **balio absolutua**,  $|a|$  zeinurik ez duen zenbakia da.

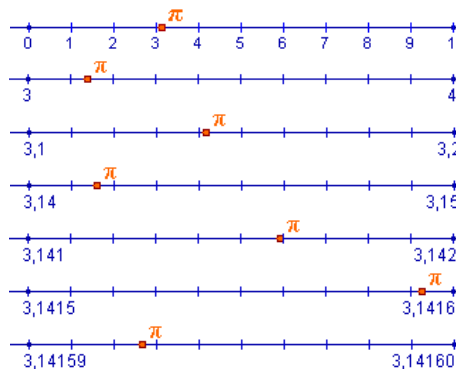
A eta b puntuen arteko **distantzia** haien kenduraren balio absolutua da,  $|a-b| = |b-a|$

### Tarteak: segmentuak eta zuzenerdiak

- Tarte itxia  $[a, b]$
- Tarte irekia  $(a, b)$
- Tarte erdi irekia  $(a, b]$  edo  $[a, b)$
- Tarte mugatugabea, hala nola  $[a, +\infty)$  edo  $(-\infty, a]$

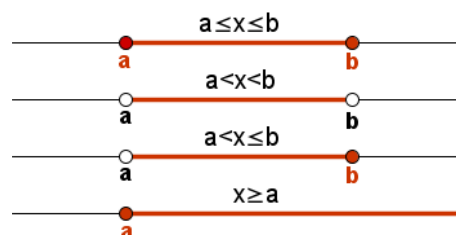
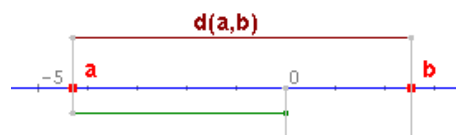


Zenbaki erreal guztiak, bai arrazionalak bai irrazionalak, zuzeneko puntu baten bidez irudika daitezke eta, era berean, zuzenaren puntu bakoitzari zenbaki erreal bat dagokio.



### Notazio zientifikoa

Zenbaki oso handiak edo oso txikiak notazio zientifikoa adierazten dira  $x \cdot 10^n$ . Zenbakiekin notazio zientifikoa eragiketarako egiteko, potentzien ezaugarriak aplikatzen ditugu.





### Avogadroren zenbakia

Ohiko baldintzetan 22,4 gas litro  $6,023 \cdot 10^{23}$  molekulez osatuta dago.



$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

1. Idatzi zenbakiaren zatiki sortzailea: 4,2323.
2. Milia ingelesak 1609,34 m neurtzen du. Borobildu km-tan 22 milia.
3. Adierazi notazio zientifikoan, hiru zifra esangarriekin, metrotan Lurraren eta 27 argi-urtetan kokatutako izarraren arteko distantzia.
4. Kalkula ezazu egiten dugun errore absolutua eta erlatiboa (%-tan) 22/7 bider 3,14 hurbiltzen dugunean.
5. Kalkulagailuarekin, idatzi  $\sqrt{21}$  cifraren borobiltzea eta mozketa, milarenetan.
6. 0,330 zenbakia x-ren hurbilketa da, errore-kota absolutua  $0,5 \cdot 10^{-3}$ , izaki. Zein balioren artean dago x zenbaki zehatza?
7. Kalkula ezazu, hiru zifra esangarriekin, baldintza normaletan 7 cm-ko erradioa duen pilota batean sartzen den gas baten molekula-kopurua.
8. Idatzi irudiaren tarteak  $[-3, 5] \cap (3, 8)$ .
9. Idatz ezazu ondorengoak betetzen dituzten x zenbakiek osatutako tarteak:  $|x-8| \leq 3$ .
10. Aurkitu 6 tik 3 unitatera urruntzen diren bi zenbaki eta 3,5 tik -2 unitate urruntzen diren beste bi. Kalkula ezazu zenbaki horietan guztietan handienaren eta txikienaren arteko distantzia.



## Praktikatzeko ariketen ebazpenak

1.  $A+B=5,9929292\dots$

$C-A=-2,68969696\dots$

$A\cdot C=0,027818181\dots$

2. a) Lehen ordenakoak:

Txikiagora: 7,4

Handiagora: 7,5

Borobiltzea: 7,5

b) Bigarren ordenakoa:

Txikiagora: 7,48

Handiagora: 7,49

Borobiltzea: 7,48

3. a) 1,100 eta 1,105 m artean

b) 1,095 eta 1,100 m artean

c) 1,095 eta 1,105 m artean

4. 1578500 eta 1579500 artean eta errore-kota 500 biztanle.

5.  $A+B = 99,1 \pm 0,1$

$A\cdot B = 579 \pm 1$

6.  $5,67 \pm 0,01 \text{ m}$

7. Errore-kota:  $0,0001 \cdot 10^8 = 10000 \text{ km}$

Azalera =  $1,90 \cdot 10^{18} \text{ km}^2$

8. 1. KASUA

1)  $A \cap B = \text{vacío}$

2)  $A \cup B = [-11, -9] \cup (-1, 6)$

3)  $A - B = A = [-11, -9]$

4)  $-A = (-\infty, -11) \cup (-9, +\infty)$

2. KASUA

1)  $A \cap B = (3, 4)$

2)  $A \cup B = [-5, 5]$

3)  $A - B = [-5, 3] \cup [4, 5]$

4)  $-A = (-\infty, -5) \cup (5, +\infty)$

3. KASUA

1)  $A \cap B = [-2, 6]$

2)  $A \cup B = [-2, 7]$

3)  $A - B = [6, 7]$

4)  $-A = (-\infty, -2) \cup (7, +\infty)$

### Autoebaluazio-ebazpenak

1. 419/99

2. 43 km

3.  $2,55 \cdot 10^{17}$

4. Errore absolutua:

$0,00285714\dots$

Errore erlatiboa:  $0,0009 \approx 0,1\%$

5. sarea.: 4,583    moz.: 4,582

6. 0,3295 eta 0,3305 artean

7.  $3,86 \cdot 10^{22}$

8. (3, 5]

9. [5, 11]

Jarduerak tutoreari bidali, ahaztu gabe. ►