

## Objectius

En esta quincena aprendràs a:

- Calcular i operar amb potències d'exponent enter.
- Reconèixer les parts d'un radical i el seu significat.
- Obtenir radicals equivalents a un de donat.
- Expressar un radical com a potència d'exponent fraccionari i viceversa.
- Operar amb radicals.
- Racionalitzar expressions amb radicals al denominador.
- Emprar la calculadora per operar amb potències i radicals.

1. Radicals .....	pàg. 22
Potències de exponent fraccionari	
Radicals equivalents	
Introduir i extreure factors	
Càlcul d'arrels	
Reduir a índex comú	
Radicals semblants	
2. Propietats .....	pàg. 25
Arrel d'un producte	
Arrel d'un quocient	
Arrel d'una potència	
Arrel d'una arrel	
3. Simplificació .....	pàg. 26
Racionalització	
Simplificar un radical	
4. Operacions amb radicals .....	pàg. 28
Suma i resta	
Multiplicació de radicals	
Divisió de radicals	

RESUM

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoevaluación

Activitats per enviar al tutor



## Propietats de les potències d'exponent enter

$$x^2 \cdot x^7 = x^{2+7} = x^9$$

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$$

$$(x^7)^3 = x^{7 \cdot 3} = x^{21}$$

$$7^0 = 1$$

$$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$$

$$\frac{8^6}{4^6} = \left(\frac{8}{4}\right)^6 = 2^6$$

## Abans de començar

Convé que recordeu les propietats de les potències que ja coneixeu de cursos anteriors

- ✓ El producte de potències de la mateixa base és una altra potència de la mateixa base, l'exponent del qual és la suma dels exponents.

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

- ✓ El quocient de potències de la mateixa base és una altra potència de la mateixa base, l'exponent del qual és la resta dels exponents.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

- ✓ La potència d'una potència és una altra potència de la mateixa base, l'exponent del qual és el producte dels exponents.

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

- ✓ Una potència amb exponent zero és igual a la unitat.

$$a^0 = 1$$

- ✓ El producte de potències del mateix exponent és una altra potència amb el mateix exponent, la base de la qual és el producte de les bases.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

- ✓ El quocient de potències amb el mateix exponent és una altra potència amb el mateix exponent, la base de la qual és el quocient de les bases.

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$



# Potències i radicals

## 1. Radicals

### Definició

Anomenem **arrel n-èsima** d'un nombre donat **a** el nombre **b** que elevat a n ens dona a.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Un **radical** és equivalent a una **potència d'exponent fraccionari** en la qual el **denominador** de la fracció és l'**índex** del radical i el **numerador** de la fracció és l'**exponent** del radicand.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

### Radicals equivalents

Dos o més radicals s'anomenen **equivalents** si les fraccions dels exponents de les potències associades són equivalents.

Donat un radical es poden obtenir radicals equivalents infinits, **multiplicant** o **dividint** l'exponent del radicand i l'índex de l'arrel pel mateix nombre. Si es multiplica s'anomena **amplificar** i si es divideix s'anomena **simplificar** el radical.

Un radical és **irreductible** quan la fracció de la potència associada és irreductible.

### Introducció i extracció de factors

Per **introduir** un factor dins d'un radical s'eleva el factor a la potència que indica l'índex i s'escriu a dins.

Si algun factor del radicand té per exponent un nombre més gran que l'índex, es pot **extreure** fora del radical dividint l'exponent del radicand entre l'índex. El quocient és l'exponent del factor que surt a fora i la resta és l'exponent del factor que queda a dins.

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ per ser } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

$$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$$

són equivalents per ser:  $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

$$\text{Amplificar: } \sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3 \cdot 2]{x^{2 \cdot 2}} = \sqrt[6]{x^4}$$

$$\text{Simplificar: } \sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6 : 2]{x^{4 : 2}} = \sqrt[3]{x^2}$$

$$\sqrt[3]{x^2}$$

Irreductible per ser MCD.(3,2)=1

#### Introduir

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3 \cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = \sqrt[3]{8 \cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

#### Extreure:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3} \quad \begin{array}{r} 13 \\ 5 \quad \overline{) 13} \\ \underline{10} \\ 3 \end{array}$$

1728	2
864	2
432	2
216	2
108	2
54	2
27	3
9	3
3	3
1	

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{1728} &= \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^3} = \\ &= 2^2 \cdot 3 = 12 \end{aligned}$$

## Càlcul d'arrels

Per calcular l'arrel n-èsima d'un nombre primer es factoritza i s'escriu el nombre en forma de potència i després s'extreuen tots els factors que sigui possible.

Si tots els exponents del radicand són múltiples de l'índex, l'arrel és exacta.

### Reduir a índex comú

$$\sqrt[6]{2} ; \sqrt[10]{3}$$

$$\text{m.c.m}(6, 10) = 30$$

$$\sqrt[6]{2} = \sqrt[30]{2^5} = \sqrt[30]{32}$$

$$\sqrt[10]{3} = \sqrt[30]{3^3} = \sqrt[30]{27}$$

## Reducció a índex comú

Reduir a **índex comú** dos o més radicals és trobar radicals equivalents als donats que tinguin el mateix índex.

Un índex comú és qualsevol múltiple del mcm dels índexs.

El mínim índex comú és el mcm dels índexs; habitualment es tria aquest.

Els següents radicals són semblants:

$$2\sqrt[3]{4} ; 7\sqrt[3]{4} ; 5\sqrt[3]{4}$$

Els següents radicals no són semblants:

$$2\sqrt[3]{4} ; 2\sqrt[5]{4} \text{ L'índex és diferent}$$

## Radicals semblants

Els **radicals semblants** són aquells que tenen el mateix índex i el mateix radicand. Poden diferir únicament en el coeficient que els multiplica.

## EXERCICIS resolts

1. Escriviu els següents radicals com a potència d'exponent fraccionari:

a)  $\sqrt[5]{3}$   $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b)  $\sqrt[5]{x^3}$   $\sqrt[5]{x^3}$

2. Escriviu les següents potències com a radicals:

a)  $7^{\frac{1}{2}}$   $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

b)  $5^{\frac{2}{3}}$   $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

3. Escriviu un radical equivalent, amplificant el que s'ha proporcionat:

a)  $\sqrt[3]{5}$   $\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{5^{1 \cdot 2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b)  $\sqrt[5]{x^4}$   $\sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5]{x^{4 \cdot 3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

4. Escriviu un radical equivalent, simplificant el que s'ha proporcionat.

a)  $\sqrt[6]{49}$   $\sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6]{7^{2 \cdot 2}} = \sqrt[3]{7}$

b)  $\sqrt[35]{x^{28}}$   $\sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

5. Introduïu els factors dins del radical:

a)  $2 \cdot \sqrt[4]{3}$   $2 \cdot \sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

b)  $x^2 \sqrt[7]{x^3}$   $x^2 \sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{(x^2)^7 \cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{14} \cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{17}}$

6. Extraieu els factors del radical:

a)  $\sqrt[4]{128}$   $\sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2 \sqrt[4]{2^3} = 2 \sqrt[4]{8}$

b)  $\sqrt[7]{x^{30}}$   $\sqrt[7]{x^{30}} = \sqrt[7]{x^{28+2}} = \sqrt[7]{x^{28} \cdot x^2} = x^4 \sqrt[7]{x^2}$

7. Calculeu les següents arrels:

a)  $\sqrt[5]{1024}$   $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

b)  $\sqrt[7]{x^{84}}$   $\sqrt[7]{x^{84}} = \sqrt[7]{x^{12 \cdot 7}} = \sqrt[7]{(x^{12})^7} = x^{12}$

8. Reduïu a índex comú

a)  $\sqrt{3}; \sqrt[3]{5}$   $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$  ;  $\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$

b)  $\sqrt[4]{x^3}; \sqrt[6]{x^5}$   $\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[12]{x^9}$  ;  $\sqrt[6]{x^5} = \sqrt[12]{x^{10}}$

9. Indiqueu quins radicals són semblants

a)  $\sqrt[4]{3}; 5\sqrt[4]{3}$   $\sqrt[4]{3}$  i  $5\sqrt[4]{3}$  Són semblants

b)  $\sqrt[4]{x}; \sqrt[3]{x}$   $\sqrt[4]{x}$  i  $\sqrt[3]{x}$  No són semblants, l'índex és diferent.

## 2. Propietats

### Arrel d'un producte

L'arrel n-èsima d'un producte és igual al producte de les arrels n-èsimes dels factors.

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

**Demostración:**  $\sqrt[n]{ab} = (ab)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2 \cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[7]{b^4}$$

### Arrel d'un quocient

L'arrel n-èsima d'un quocient és igual al quocient de les arrels n-èsimes del dividend i del divisor.

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

**Demostración:**  $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

### Arrel d'una potència

Per trobar l'arrel d'una potència, es calcula l'arrel de la base i després s'eleva el resultat a la potència donada.

$$\sqrt[n]{a^p} = (\sqrt[n]{a})^p$$

**Demostración:**  $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = (\sqrt[n]{a})^p$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = (\sqrt[5]{2})^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = (\sqrt[3]{x})^7$$

### Arrel d'una arrel

L'arrel n-èsima de l'arrel m-èsima d'un nombre és igual a l'arrel n·m-èsima del nombre esmentat.

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$$

**Demostración:**  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n \cdot m}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

## 3. Simplificació

### Racionalització

**Racionalitzar** una expressió amb un radical en el denominador consisteix a trobar una expressió equivalent que no tingui arrels en el denominador.

Per això es multiplica el numerador i el denominador per l'expressió adequada perquè, en operar, l'arrel desaparegui.

Si el denominador és un binomi es multiplica el numerador i el denominador pel conjugat del denominador

\* El conjugat de  $a+b$  és  $a-b$

### Simplificar un radical

**Simplificar** un radical és escriure'l en la forma més senzilla, de manera que:

- L'índex i l'exponent siguin primers entre ells.
- No es pugui extreure cap factor del radicand.
- El radicand no tingui cap fracció.

**Quan el denominador és un radical**

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1 \cdot \sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} = \frac{1 \cdot \sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4} \cdot \sqrt[7]{x^3}} = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$$

**Quan el denominador és un binomi**

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \\ &= \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[7]{a^{30}} = a^4 \sqrt[7]{a^2}$$



**EXERCICIS resolts**

10. Escriviu amb una sola arrel:

a)  $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$   $\sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b)  $\sqrt[7]{X^4 \sqrt{X}}$   $\sqrt[7]{X^4 \sqrt{X}} = \sqrt[7]{\sqrt{X^8 \cdot X}} = \sqrt[14]{X^9}$

11. Escriviu amb una sola arrel:

a)  $\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[4]{27}}$   $\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt[4]{27}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b)  $\sqrt[5]{X \cdot \sqrt[5]{X^2}}$   $\sqrt[5]{X \cdot \sqrt[5]{X^2}} = \sqrt[5]{X^3}$

12. Escriviu amb una sola arrel:

a)  $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$   $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b)  $\frac{\sqrt[5]{X^4}}{\sqrt[5]{X^3}}$   $\frac{\sqrt[5]{X^4}}{\sqrt[5]{X^3}} = \sqrt[5]{\frac{X^4}{X^3}} = \sqrt[5]{X}$

13. Racionalitzeu.

a)  $\frac{1}{\sqrt[5]{9}}$   $\frac{1}{\sqrt[5]{9}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^2}} = \frac{1 \cdot \sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2 \cdot \sqrt[5]{3^3}}} = \frac{\sqrt[5]{3^2}}{\sqrt[5]{3^5}} = \frac{\sqrt[5]{9}}{3}$

b)  $\frac{2}{5\sqrt[3]{4}}$   $\frac{2}{5\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{5\sqrt[3]{2^2}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{2^2 \cdot \sqrt[3]{2}}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{5\sqrt[3]{2^3}} = \frac{2 \cdot \sqrt[3]{2}}{5 \cdot 2} = \frac{\sqrt[3]{2}}{5}$

14. Racionalitzeu

a)  $\frac{1}{\sqrt[7]{X^4}}$   $\frac{1}{\sqrt[7]{X^4}} = \frac{1 \cdot \sqrt[7]{X^3}}{\sqrt[7]{X^4 \cdot \sqrt[7]{X^3}}} = \frac{\sqrt[7]{X^3}}{\sqrt[7]{X^7}} = \frac{\sqrt[7]{X^3}}{X}$

b)  $\frac{1}{x^2 \sqrt[7]{X^3}}$   $\frac{1}{x^2 \sqrt[7]{X^3}} = \frac{1 \cdot \sqrt[7]{X^4}}{x^2 \sqrt[7]{X^3 \cdot \sqrt[7]{X^4}}} = \frac{\sqrt[7]{X^4}}{x^2 \sqrt[7]{X^7}} = \frac{\sqrt[7]{X^4}}{x^2 \cdot X} = \frac{\sqrt[7]{X^4}}{X^3}$

15. Racionalitzeu

a)  $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$   $\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \frac{1 \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{2})}{3 - 2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})$

b)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 2}$   $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + 2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 2)}{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)} = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{5 - 4} = \sqrt{10} - 2\sqrt{2}$

c)  $\frac{1}{3 - \sqrt{x}}$   $\frac{1}{3 - \sqrt{x}} = \frac{1 \cdot (3 + \sqrt{x})}{(3 - \sqrt{x})(3 + \sqrt{x})} = \frac{3 + \sqrt{x}}{9 - x}$

## 4. Operacions amb radicals

### Suma i resta de radicals

Per sumar o restar radicals cal que siguin semblants (que tinguin el mateix índex i el mateix radicand). Quan això passa se sumen o es resten els coeficients de fora i es deixa el mateix radical.

$$\begin{aligned}\sqrt{8} + \sqrt{2} &= \sqrt{2^3} + \sqrt{2} = \\ &= 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

### Producte de radicals

Per multiplicar radicals cal que tinguin el mateix índex. Quan això passa el resultat és un radical del mateix índex i que té com a radicand el producte dels radicands.

En cas de tenir un índex diferent, en primer lloc es redueixen a índex comú.

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt[6]{3^2} \cdot \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{9 \cdot 8} = \sqrt[6]{72}$$

$$\sqrt[5]{x} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[10]{x^2} \cdot \sqrt[10]{x^5} = \sqrt[10]{x^7}$$

### Quocient de radicals

Per dividir radicals cal que tinguin el mateix índex. Quan això passa el resultat és un radical amb el mateix índex i que té com a radicand el quocient dels radicands.

Si tenen un índex diferent, primer es redueixen a índex comú.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x}} = \frac{\sqrt[8]{x^2}}{\sqrt[8]{x}} = \sqrt[8]{x}$$

**EXERCICIS resolts**

16. Calculeu la suma:

a) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$	$\sqrt{40} + \sqrt{90} = \sqrt{4 \cdot 10} + \sqrt{9 \cdot 10} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$
b) $2\sqrt{32} - \sqrt{8}$	$2\sqrt{32} - \sqrt{8} = 2\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3} = 2 \cdot 2^2 \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$
c) $\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{16}$	$\sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{16} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[6]{4^2} = \sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{4} = 2\sqrt[3]{4}$
d) $2\sqrt{\frac{1}{2}} + 5\sqrt{8}$	$2\sqrt{\frac{1}{2}} + 5\sqrt{8} = \sqrt{\frac{4}{2}} + 5\sqrt{2^3} = \sqrt{2} + 10\sqrt{2} = 12\sqrt{2}$

17. Calcular i simplificar:

a) $\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt{27}}$	$\sqrt[4]{3 \cdot \sqrt{27}} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$
b) $\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x^2}}$	$\sqrt[3]{x \cdot \sqrt{x^2}} = \sqrt[3]{x^3}$
c) $\sqrt[5]{x^3 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}}$	$\sqrt[5]{x^3 \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}} = \sqrt[5]{x \cdot x \cdot x^3} = \sqrt[5]{x^5} = x$
d) $\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}}$	$\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{8}} = \sqrt[3]{2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2^3}} = \sqrt[3]{2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}} = \sqrt[3]{2^{\frac{17}{2}}} = \sqrt[3]{2^8 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt[3]{2}$

18. Calcular i simplificar:

a) $\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}}$	$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[3]{2^4}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{\sqrt[15]{2^{20}}}{\sqrt[15]{2^3}} = \sqrt[15]{2^{17}} = 2^{15/15} \sqrt[15]{2^2} = 2\sqrt[15]{4}$
b) $\frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}}$	$\frac{\sqrt[7]{x^4}}{\sqrt[14]{x^3}} = \frac{\sqrt[14]{x^8}}{\sqrt[14]{x^3}} = \sqrt[14]{x^5}$
a) $\frac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}}$	$\frac{\sqrt[6]{8^4}}{\sqrt[8]{4^3}} = \frac{\sqrt[6]{(2^3)^4}}{\sqrt[8]{(2^2)^3}} = \frac{\sqrt[6]{2^{12}}}{\sqrt[8]{2^6}} = \frac{\sqrt[24]{(2^{12})^4}}{\sqrt[24]{(2^6)^3}} = \frac{\sqrt[24]{2^{48}}}{\sqrt[24]{2^{18}}} = \sqrt[24]{2^{30}} = \sqrt[24]{2^{24} \cdot 2^6} = 2\sqrt[4]{2}$
b) $\frac{\sqrt[3]{x^4 \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$	$\frac{\sqrt[3]{x^4 \sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^4 \cdot x^{\frac{1}{2}}}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^{\frac{9}{2}}}}{\sqrt[4]{x}} = \frac{\sqrt[12]{x^{18}}}{\sqrt[12]{x^3}} = \sqrt[12]{x^{15}} = x^{12/12} \sqrt[12]{x^3} = x\sqrt[12]{x^3}$

19. Calcular i simplificar:

a) $\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}}$	$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[4]{8}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[12]{2^6} \cdot \sqrt[12]{2^8}}{\sqrt[12]{2^9}} = \frac{\sqrt[12]{2^{14}}}{\sqrt[12]{2^9}} = \sqrt[12]{2^5} = \sqrt[4]{2^5} = 2\sqrt[4]{2}$
b) $\frac{\sqrt[5]{2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}}{\sqrt{8}}$	$\frac{\sqrt[5]{2\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{4}}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt[5]{2 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{2}{3}}}}{\sqrt{2^3}} = \frac{\sqrt[10]{2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{4}{3}}}}{\sqrt{2^3}} = \frac{\sqrt[30]{2^9 \cdot 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2^{20}}}{\sqrt{2^3}} = \frac{\sqrt[30]{2^{29}}}{\sqrt{2^3}} = \frac{\sqrt[30]{2^{29}}}{\sqrt[30]{2^{15}}} = \frac{1}{\sqrt[30]{2^{14}}} = \frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{16} \cdot 2^{14}}} = \frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{\sqrt[30]{2^{30}}} = \frac{\sqrt[30]{2^{14}}}{2} = \frac{\sqrt[15]{2^7}}{2}$

# Potències i radicals



## Per practicar

1. Escriviu com a potència d'exponent fraccionari:

a)  $\sqrt{5}$                       b)  $\sqrt[3]{x^2}$   
c)  $\sqrt{a^3}$                       d)  $\sqrt[5]{a^3}$

2. Escriviu com un radical:

a)  $3^{\frac{1}{2}}$                       b)  $5^{\frac{3}{2}}$   
c)  $x^{\frac{1}{5}}$                       d)  $x^{\frac{5}{3}}$

3. Simplifiqueu els següents radicals:

a)  $\sqrt[4]{25}$                       b)  $\sqrt[8]{8^2}$   
c)  $\sqrt[14]{x^6}$                       d)  $\sqrt[30]{16 \cdot x^8}$

4. Extraieu tots els factors possibles dels radicals següents

a)  $\sqrt{18}$                       b)  $\sqrt[3]{16}$   
c)  $\sqrt{9a^3}$                       d)  $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

5. Introduïu dins del radical tots els factors possibles que s'hi trobin fora.

a)  $3\sqrt{5}$                       b)  $2\sqrt{a}$   
c)  $3a\sqrt{2a^2}$                       d)  $ab^2\sqrt{a^2b}$

6. Reduïu a l'índex mínim comú els següents radicals.

a)  $\sqrt{5}; \sqrt[4]{3}$                       b)  $\sqrt[3]{4}; \sqrt[4]{3}; \sqrt{2}$   
c)  $\sqrt[4]{3}; \sqrt[8]{7}; \sqrt{2}$                       d)  $\sqrt{3}; \sqrt[6]{32}; \sqrt[3]{5}$

7. Sumeu els següents radicals indicats.

a)  $\sqrt{45} - \sqrt{125} - \sqrt{20}$   
b)  $\sqrt{75} - \sqrt{147} + \sqrt{675} - \sqrt{12}$   
c)  $\sqrt{175} + \sqrt{63} - 2\sqrt{28}$   
d)  $\sqrt{20} + \frac{1}{3}\sqrt{45} + 2\sqrt{125}$

8. Multipliqueu els radicals següents

a)  $\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}$                       b)  $5\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{5}$   
c)  $\sqrt[3]{12} \cdot \sqrt[3]{9}$                       d)  $\sqrt{x} \cdot \sqrt[3]{2x^2}$   
e)  $\sqrt{2ab} \cdot \sqrt[4]{8a^3}$                       f)  $\sqrt[4]{2x^2y^3} \cdot \sqrt[6]{5x^2}$

9. Multipliqueu els radicals següents

a)  $(\sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{2}$   
b)  $(7\sqrt{5} + 5\sqrt{3}) \cdot 2\sqrt{3}$   
c)  $(2\sqrt{3} + \sqrt{5} - 5\sqrt{2}) \cdot 4\sqrt{2}$   
d)  $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3})$

10. Dividiu els radicals següents

a)  $\frac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$                       b)  $\frac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$   
c)  $\frac{\sqrt{9x}}{\sqrt[3]{3x}}$                       d)  $\frac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$   
e)  $\frac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[2]{3}}$                       f)  $\frac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[8]{x^3}}$

11. Calculeu:

a)  $\sqrt[5]{2^4\sqrt{2}}$                       b)  $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$   
c)  $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2}\sqrt{x}}$                       d)  $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2}\sqrt{2}}$

12. Racionalitzeu.

a)  $\frac{2}{\sqrt{7}}$                       b)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$   
c)  $\frac{2a}{\sqrt{2ax}}$                       d)  $\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

13. Racionalitzeu.

a)  $\frac{2}{\sqrt{3}-1}$                       b)  $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$   
c)  $\frac{5}{4-\sqrt{11}}$                       d)  $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$



$$\sqrt{n} = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}}$$

## Per saber-ne més

### Aproximació d'una arrel quadrada mitjançant fraccions

Qualsevol nombre irracional es pot aproximar mitjançant una fracció, que s'obté a partir del seu desenvolupament en fracció contínua.

Mitjançant les fraccions contínues es pot aproximar qualsevol arrel a una fracció.

#### Desenvolupament

de:  $\sqrt{2} = 1'4142$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1'5$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = \frac{7}{5} = 1'4$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{17}{12} = 1'4166$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = \frac{41}{29} = 1'4167$$

$$1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = \frac{99}{70} = 1'4142$$

#### Algorisme

La primera xifra  $a_1$  és la part sencera de l'arrel

$$x_1 = \sqrt{2}$$

$$a_1 = [x_1] = [\sqrt{2}] = 1$$

La segona xifra  $a_2$  és la part sencera de  $x_2$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{x_2} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_2 = [x_2] = [\sqrt{2} + 1] = 2$$

La tercera xifra  $a_3$  és la part sencera de  $x_3$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3}$$

$$\sqrt{2} + 1 = 2 + \frac{1}{x_3} \Rightarrow \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{x_3} \Rightarrow x_3 = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

$$a_3 = [x_3] = [\sqrt{2} + 1] = 2$$

No és necessari fer més càlculs perquè es repeteixin periòdicament els quocients.

#### Altres desenvolupaments

$$\sqrt{3} = [1, \overline{12}] \quad \sqrt{7} = [2, \overline{1114}]$$

$$\sqrt{5} = [2, \overline{4}] \quad \sqrt{8} = [2, \overline{14}]$$

$$\sqrt{6} = [2, \overline{24}] \quad \sqrt{10} = [3, \overline{6}]$$

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}] = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

# Potències i radicals



## Recordeu el més important

### Radicals

Anomenem **arrel n-èsima** d'un nombre donat el nombre que elevat a **n** ens dona el primer.

L'expressió  $\sqrt[n]{a}$  és un **radical** d'**n**, i el **radicand** **a**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow a = b^n$$

### Potència d'exponent fraccionari

Un radical és equivalent a una potència d'**exponent fraccionari**, en què el numerador de la fracció és l'exponent del radicand i el denominador de la fracció és l'índex de l'arrel.

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

### Propietat fonamental

El valor d'un radical no varia si es multipliquen o es divideixen per un mateix nombre l'índex i l'exponent del radicand.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n \cdot p]{a^{m \cdot p}}$$

### Reduir a índex comú

Reduir a índex comú dos radicals donats és trobar dos radicals equivalents a aquests radicals que tinguin el mateix índex.

### Els radicals semblants

Són aquells que tenen el mateix índex i el mateix radicand. Poden diferir únicament en el coeficient que els multiplica.

### Operacions amb radicals

Per **multiplicar (o dividir)** radicals del mateix índex es deixa l'índex i es multipliquen (o divideixen) els radicands.

Per trobar l'**arrel d'un altre radical** es deixa el radicand i es multipliquen els índexs.

Per **sumar (o restar)** radicals semblants es deixa el radical i se sumen (o resten) els coeficients.

### Racionalitzar

Racionalitzar una expressió amb radicals en el denominador és trobar una expressió equivalent que no tingui arrels en el denominador.



1. Calculeu l'arrel següent:  $\sqrt[7]{78125}$
2. Escriviu en forma d'exponent fraccionari:  $\sqrt[10]{x^3}$
3. Calcular:  $\sqrt{18} - \sqrt{98}$
4. Introduiu el factor en el radical:  $6\sqrt[4]{5}$
5. Calculeu, simplifiqueu i escriviu com un únic radical:  
 $\sqrt[7]{7\sqrt[3]{3}}$
6. Extraieu factors del radical:  $\sqrt[4]{243}$
7. Racionalitzeu:  $\frac{45}{\sqrt[3]{25}}$
8. Calcular i simplificar:  $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[5]{4}$
9. Calcular i simplificar:  $\frac{\sqrt[7]{125}}{\sqrt[3]{5}}$
10. Quant fa l'aresta d'un cub si el seu volum és  $1331\text{m}^3$

# Potències i radicals

## Solucions dels exercicis per practicar

- a)  $5^{\frac{1}{2}}$  b)  $x^{\frac{2}{3}}$   
c)  $a^{\frac{3}{2}}$  d)  $a^{\frac{3}{5}}$
- a)  $\sqrt{3}$  b)  $\sqrt{5^3}$   
c)  $\sqrt[5]{x}$  d)  $\sqrt[3]{x^5}$
- a)  $\sqrt{5}$  b)  $\sqrt[4]{8}$   
c)  $\sqrt[7]{x^3}$  d)  $\sqrt[15]{4x^2}$
- a)  $3\sqrt{2}$  b)  $2\sqrt[3]{2}$   
c)  $3a\sqrt{a}$  d)  $7ab^2c^3\sqrt[3]{2abc}$
- a)  $\sqrt{45}$  b)  $\sqrt{4a}$   
c)  $\sqrt{18a^4}$  d)  $\sqrt[3]{a^5b^7}$
- a)  $\sqrt[4]{25}; \sqrt[4]{3}$   
b)  $\sqrt[12]{256}; \sqrt[12]{27}; \sqrt[12]{4}$   
c)  $\sqrt[18]{9}; \sqrt[8]{7}; \sqrt[8]{216}$   
d)  $\sqrt[6]{27}; \sqrt[6]{32}; \sqrt[6]{25}$
- a)  $-4\sqrt{5}$  b)  $11\sqrt{3}$   
c)  $4\sqrt{7}$  d)  $15\sqrt{5}$
- a)  $\sqrt{18}$  b)  $15\sqrt{10}$   
c)  $\sqrt[3]{108}$  d)  $\sqrt[6]{4x^7}$   
e)  $\sqrt[4]{32a^5b}$  f)  $\sqrt[12]{200x^{10}y^9}$
- a)  $2 - \sqrt{6}$   
b)  $14\sqrt{5} + 30$   
c)  $8\sqrt{6} + 4\sqrt{10} - 20$   
d) 2
- a)  $\sqrt{2}$  b)  $y\sqrt{x}$   
c)  $\sqrt[6]{81x}$  d)  $\sqrt[6]{8a^3b^2}$   
e)  $\sqrt[6]{243}$  f)  $\sqrt[24]{x^{11}}$
- a)  $\sqrt[4]{2}$  b)  $\sqrt[20]{x^{11}}$   
c)  $\sqrt[24]{x^{23}}$  d)  $\sqrt[3]{x^2}$
- a)  $\frac{2\sqrt{7}}{7}$  b)  $\frac{\sqrt{3}}{3}$   
c)  $\frac{\sqrt{2ax}}{x}$  d)  $\frac{\sqrt[5]{x^2}}{x}$
- a)  $\sqrt{3} + 1$  b)  $-7 - 3\sqrt{5}$   
c)  $4 + \sqrt{11}$  d)  $2 - \sqrt{2}$

### solucions de L'AUTOAVALUACIÓ

- 5
- $x^{\frac{3}{10}}$
- $-4\sqrt{2}$
- $\sqrt[4]{6480}$
- $\sqrt[2]{1029}$
- $3\sqrt[4]{3}$
- $9\sqrt[3]{5}$
- $\sqrt[20]{8192}$
- $\sqrt[2]{25}$
- 11 cm

No us oblideu d'enviar les activitats al tutor o tutora ►