

Objectius

Aquesta quinzena aprendreu a:

- Reconèixer i dibuixar figures semblants.
- Aplicar els criteris de semblança de triangles.
- Demostrar i utilitzar els teoremes del catet i de l'altura.
- Aplicar el teorema de Pitàgores generalitzat.
- Calcular àrees i volums d'una figura a partir d'una altra de semblant.
- Calcular distàncies en plànols i mapes.
- Resoldre problemes de mesura utilitzant el teorema de Tales i la semblança.

Abans de començar.

1. Semblança.....pàg. 92

Figures semblants
Teorema de Tales
Triangles semblants

2. Triangles rectangles. Teoremes.....pàg. 96

Teorema del Catet
Teorema de l'altura
Teorema de Pitàgores generalitzat

3. Raó de semblança.....pàg. 99

Raó de semblança en longituds
Raó de semblança en àrees
Raó de semblança en volums

4. Aplicacions.....pàg. 102

Escales
Mesurar distàncies inaccessibles

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

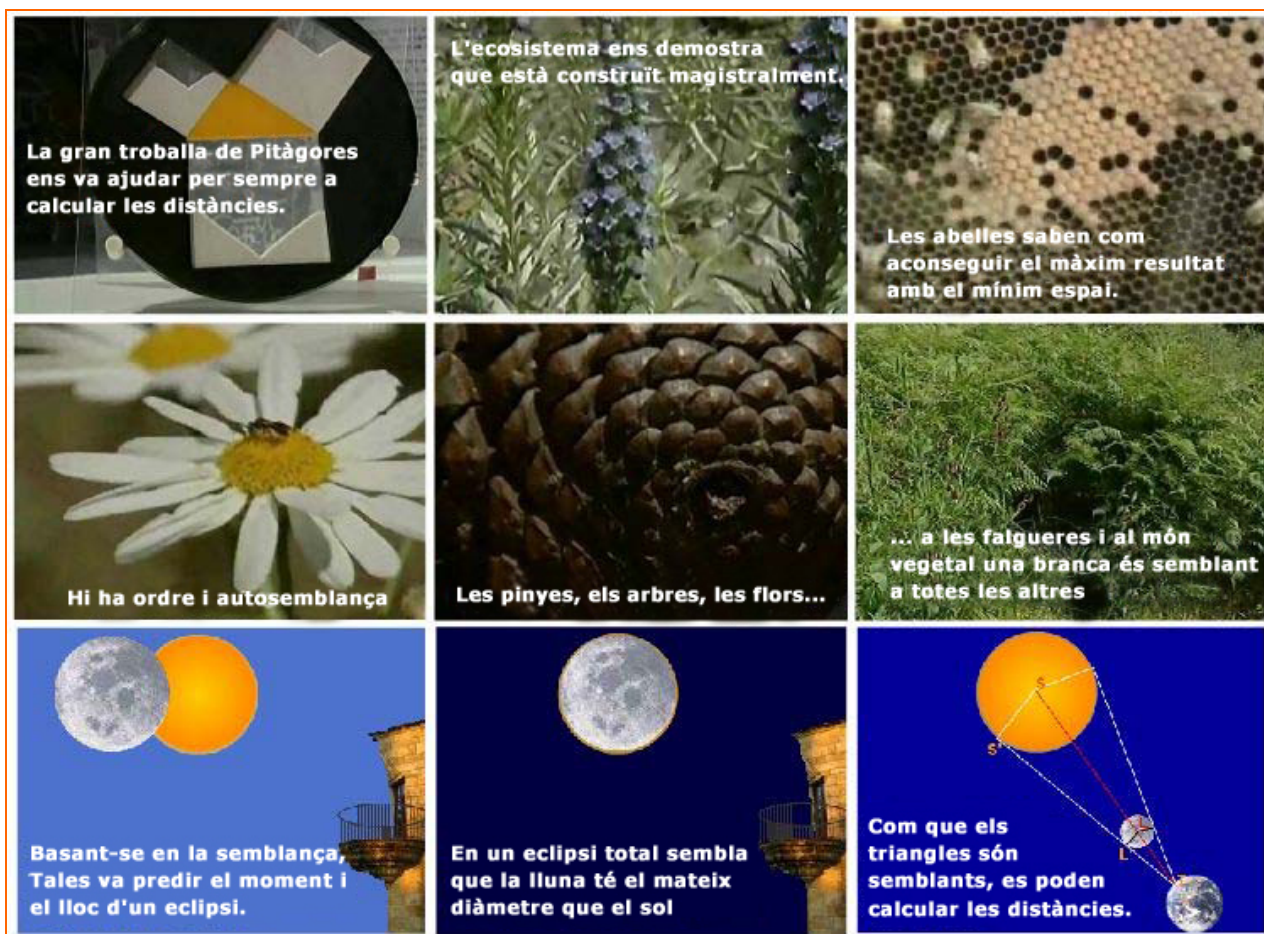
Resum

Autoavaluació

Activitats per enviar al tutor

ANNEX

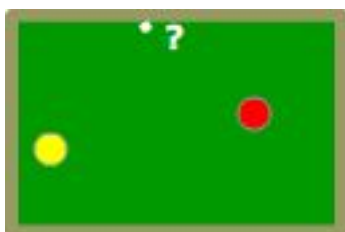
Abans de començar



Investigueu jugant

Com fer carambola a una banda?

Si heu jugat al billar, sabreu que fer carambola a una banda significa que la bola llançada ha de tocar una vegada en el marc de la taula abans de fer carambola. N'hi ha prou amb aplicar la semblança per aconseguir-ho. Com?



Cap on hem de dirigir la bola groga perquè després de rebotar a la banda vagi a la bola vermella?

Recordeu-ho

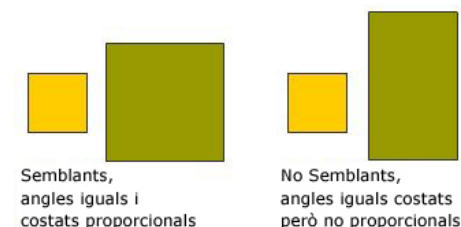
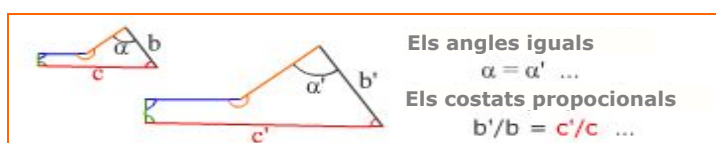
Abans de continuar endavant us convé comprovar que recordeu alguna cosa la proporcionalitat directa i algunes propietats bàsiques dels triangles.

Semblança

1. Figures semblants

Les figures semblants són les que mitjançant el zoom (homotècies) i moviments (girs, translacions i simetries) poden coincidir.

Un polígon està determinat pels seus costats i angles, per tant perquè dos polígons siguin semblants n'hi ha prou amb què els **costats homòlegs siguin proporcionals** (amb el zoom es multipliquen tots els costats pel mateix nombre) **i els seus angles iguals** (les homotècies, els girs, les translacions i simetries no modifiquen els angles de les figures).



Teorema de Tales

Perquè dos polígons siguin semblants s'han de complir dues condicions:

1. Angles iguals
2. Costats proporcionals

Però en els triangles n'hi ha prou que es doni una condició.

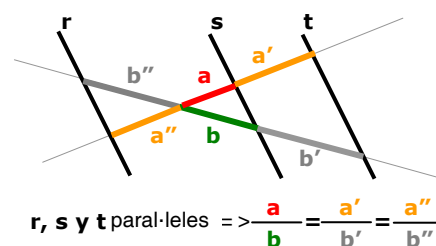
El teorema de Tales, demostra que en **triangles**

Angles iguals $\Rightarrow$ Costats proporcionals

El teorema afirma que si dues rectes es tallen per paral·lels, els segments que aquests paral·lels defineixen en les rectes tenen la mateixa proporció.

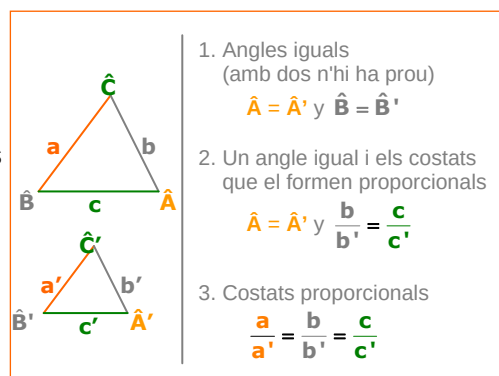
També es compleix el recíproc del teorema de Tales,

Segments proporcionals $\Rightarrow$ paral·lels.



Triangles semblants. Criteris

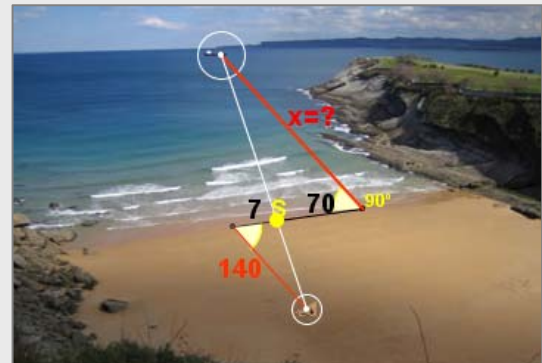
Dos triangles són semblants si compleixen algun dels següents criteris anomenats criteris de semblança.



Exercicis resolts

1. Per calcular la distància des de la platja a un vaixell s'han pres les mesures de la figura. Calculeu la distància fins al vaixell.

$$\frac{x}{140} = \frac{70}{7} \Rightarrow x = \frac{70 \cdot 140}{7} = 1400 \text{ m}$$



2. Apliqueu el teorema de Tales per calcular les mesures de x, y, z.

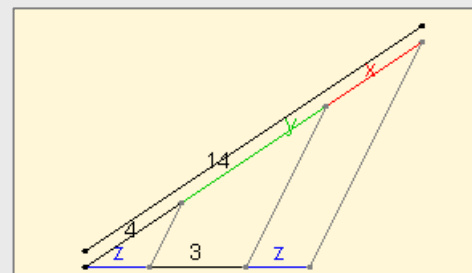
Calculem x: $\frac{x}{z} = \frac{4}{z} \Rightarrow x = 4$

Troblem y: $4 + y + x = 14$

Com que $x=4$ resulta que $y=6$

I si apliquem una altra vegada el teorema de Tales:

$$\frac{z}{4} = \frac{3}{y} \Rightarrow z = 2$$



3. Observeu les proporcions que es dedueixen del teorema de Tales en la figura següent:

Certes

$$y \cdot c = x \cdot a$$

$$\frac{a-y}{c-x} = \frac{b}{d}$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{c}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{a}{c}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{y}{x}$$

No tenen per què ser certes

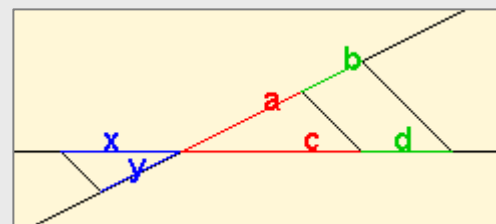
$$y \cdot a = x \cdot c$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{c+d}{d}$$

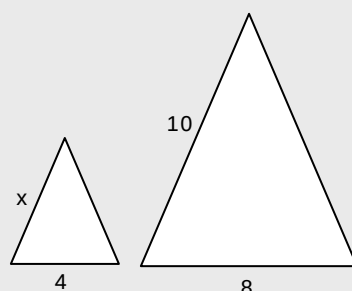
$$a = \frac{b}{d}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{b}{d} = \frac{x}{y}$$



4. Els triangles de la figura són semblants, trobeu la mesura del costat x

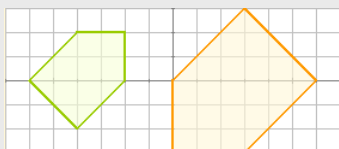


$$\frac{x}{4} = \frac{10}{8} \Rightarrow x = 5$$

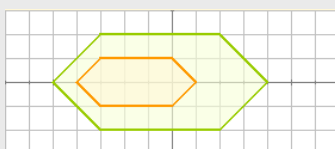
EXERCICIS resolta (continuació)

5. Contesteu raonadament:

a) Són semblants?



Sí, ja que els costats estan en proporció $2/3$ i els angles són iguals.



No, els angles són iguals però els costats no són proporcionals.



No, els angles són iguals però els costats no són proporcionals.

b) Un triangle amb un angle de 30° i un altre de 40° és forçosament semblant a un triangle amb un angle de 30° i un altre de 110° ?

Sí, doncs com que els angles d'un triangle sumen 180° , es conclou que els angles dels dos triangles són iguals i pel criteri 1, són semblants.

c) Un triangle de costats 3, 6 i 7 cm és semblant a un altre els amb costats de 9, 36 i 49 cm?

No, ja que els costats no són proporcionals.

d) Un quadrilàter de costats 3, 4, 5 i 6 cm és necessàriament semblant a un altre de costats 6, 8, 10 i 12 cm?

No, ja que encara que els costats són proporcionals, en polígons de més de tres costats amb això no n'hi ha prou perquè ocorri la semblança, a més els angles han de ser iguals.

e) Dos triangles que tenen un angle de 20° i els costats que els formen en un mesuren 6 i 15 cm i en un altre, 4 i 10 cm, són semblants?

Sí, pel segon criteri, ja que la proporció entre els costats que formen l'angle igual és en ambdós casos $2/5$.

f) Dos polígons regulars amb el mateix nombre de costats, són semblants?

Sí, els angles són iguals, $(nre. \text{ de costats} - 2) 180^\circ / nre. \text{ de costats}$, i els costats, proporcionals.

g) Els costats de dos triangles mesuren 3, 6 i 7 cm en un i $\sqrt{18}$, $\frac{12}{\sqrt{2}}$ i $7\sqrt{2}$ en un altre. Són semblants?

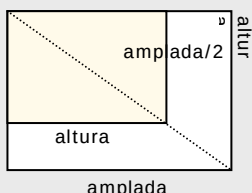
Sí, doncs els costats són proporcionals:

$$\sqrt{18} = 3 \cdot \sqrt{2}; \quad \frac{12}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

i en triangles n'hi ha prou amb aquesta condició (criteri 3)

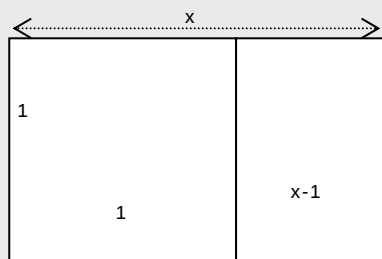
EXERCICIS resolts (continuació)

6. En tallar la meitat un full DIN-A, s'obté una semblança. Deduïu a partir d'això la proporció entre l'amplada i l'altura en aquests fulls.



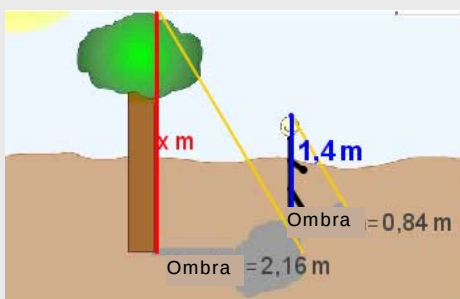
$$\frac{\frac{\text{altura}}{2}}{\frac{\text{amplada}}{2}} = \frac{\text{amplada}}{\text{altura}} \rightarrow 2 = \left(\frac{\text{amplada}}{\text{altura}}\right)^2 \Rightarrow \frac{\text{amplada}}{\text{altura}} = \sqrt{2}$$

7. El rectangle auri que apareix en el Partenó i en la Gioconda es caracteritza perquè en tallar-li el quadrat de costat el seu costat menor, s'obté un altre rectangle semblant. Calculeu la proporció entre les seves longituds.



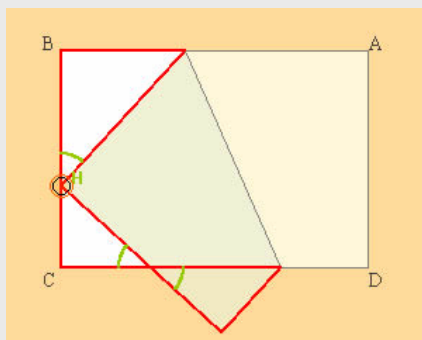
$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{raó àuria: } \Phi \approx 1,62$$

8. Trobeu l'altura de l'arbre



$$\frac{x}{2,16} = \frac{1,4}{0,84} \Rightarrow x = 2,16 \cdot \frac{1,4}{0,84} = 3,6$$

9. En doblar un rectangle, com indica la figura, s'obtenen tres triangles semblants, per què són semblants?



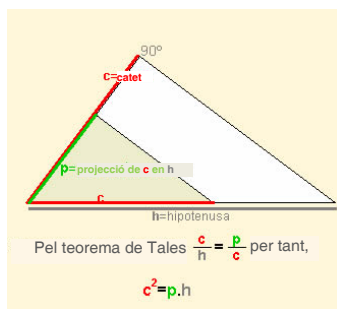
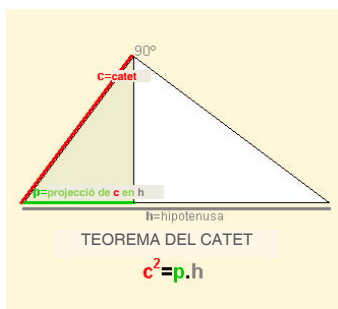
Són semblants perquè els angles són iguals, ja que tots tres són triangles rectangles, dos dels triangles tenen un altre angle igual perquè són oposats pel vèrtex. I H és igual perquè en afegir-li 90° amb la cantonada que es dobla, ens dona el complementari de l'angle marcat en els altres triangles.

Semblança

2. Triangles rectangles. Teoremes

Teorema del catet

En un triangle rectangle, el quadrat del catet és igual al producte de la hipotenusa per la projecció del catet a sobre seu. Això es dedueix de la semblança entre el triangle total i el que defineixen el catet i la seva projecció en la hipotenusa.



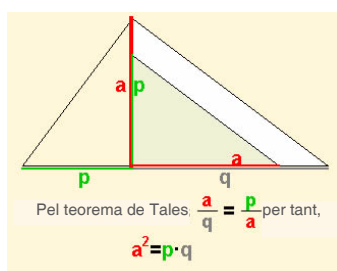
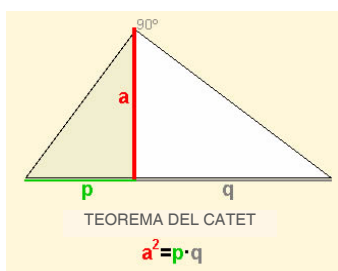
- ✓ Es fa la volta al triangle i es gira per posar-lo en posició del teorema de Tales.

$$\frac{c}{h} = \frac{p}{c} \Rightarrow \boxed{c^2 = p \cdot h}$$

El teorema es pot generalitzar a triangles acutangles i obtusangles, comparant els triangles corresponents.

Teorema de l'altura

En un triangle rectangle el quadrat de l'altura que descansa sobre la hipotenusa és igual al producte de les projeccions dels catets sobre la hipotenusa.

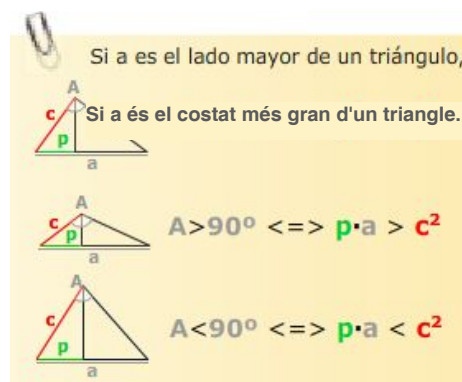
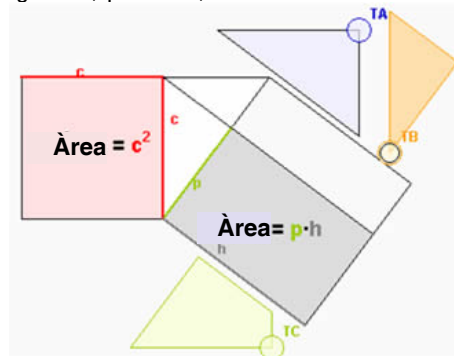


- ✓ Es gira el triangle per posar-los en posició de Tales. Llavors d'acord amb el teorema:

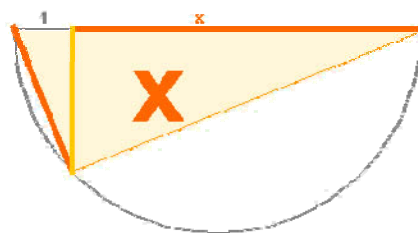
$$\frac{a}{q} = \frac{p}{a} \text{ i, per tant, } \boxed{a^2 = p \cdot q}$$

Puzle del teorema del catet

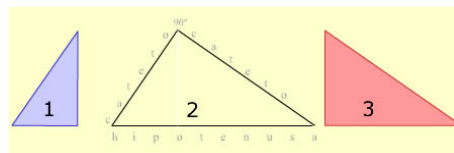
En retallar les tres peces "T_" es pot completar el quadrat o el rectangle i comprovar que ambdues àrees són iguals i, per tant, el teorema.



L'altura del triangle és $\sqrt{x}$



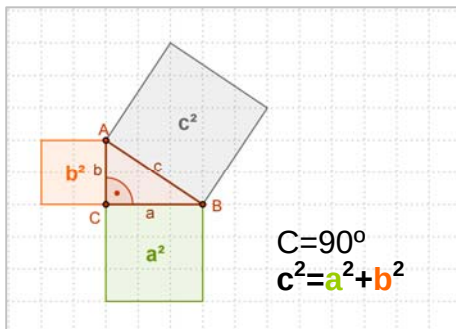
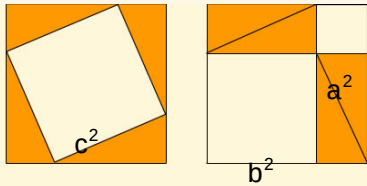
Recordeu-ho



Tres triangles semblants.

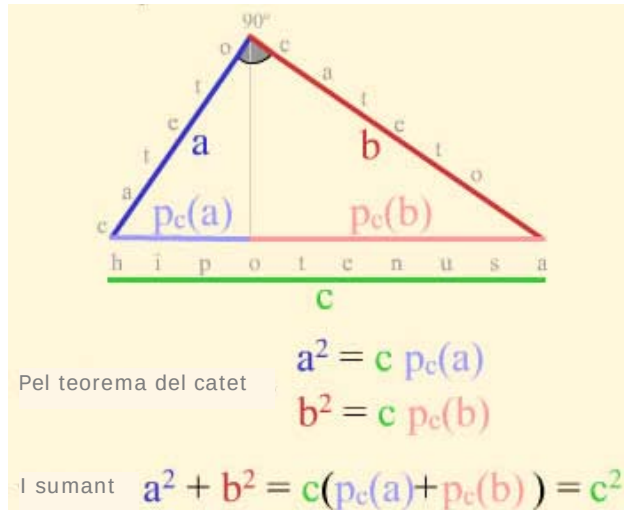
Comparant 1 i 2 = > teorema del catet
Comparant 1 i 3 = > teorema de l'altura

Demostració gràfica del teorema de Pitàgores



Teorema de Pitàgores generalitzat

Teorema de Pitàgores. $\hat{C} = 90^\circ \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2$



El teorema es generalitza a triangles obtusangles i acutangles:

✓ Si $C > 90^\circ$ llavors $c^2 > a^2 + b^2$
 $c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot p_a$

Demostració

Traçant l'altura es formen dos triangles rectangles, AHB i AHC, en els quals s'aplica el teorema de Pitàgores.

En el triangle rectangle més gran: $c^2 = (a + p_a)^2 + h^2$

En el triangle rectangle més petit: $b^2 = p_a^2 + h^2$

Restant les dues igualtats: $c^2 - b^2 = a^2 + 2 \cdot p_a \cdot a$

I aïllant:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2 \cdot a \cdot p_a$$

✓ Si $C < 90^\circ$ llavors $c^2 < a^2 + b^2$
 $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot p_a$

Demostració

Traçant l'altura es formen dos triangles rectangles, AHB i AHC, en els quals s'aplica el teorema de Pitàgores.

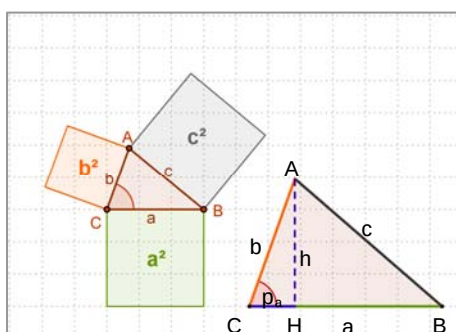
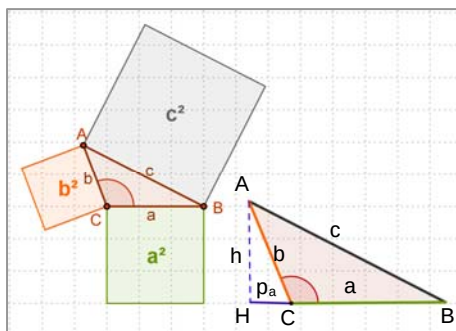
En el triangle rectangle més gran: $c^2 = (a - p_a)^2 + h^2$

En el triangle rectangle més petit: $b^2 = p_a^2 + h^2$

Restant les dues igualtats: $c^2 - b^2 = a^2 - 2 \cdot p_a \cdot a$

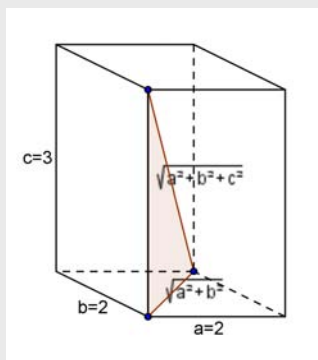
I aïllant:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot p_a$$



Exercicis resolts

- 10.** Calculeu la diagonal d'un ortoedre amb vuit arestes de 2 decímetres i la resta de 3 dm.



La diagonal de l'ortoedre, la diagonal de la base i l'altura formen un triangle rectangle.

La diagonal de la base es calcula pel teorema de Pitàgores:

$$\sqrt{2^2 + 2^2}$$

i tornant a aplicar el teorema al triangle esmentat, es conclou

que la diagonal és $\sqrt{2^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{17} \approx 4,12$

- 11.** Decidiu si és rectangle, obtusangle o acutangle el triangle de costats 3 cm, 6 cm i 8 cm.

Cal decidir si l'angle més gran del triangle és obtús, recte o agut. S'aplica el teorema generalitzat de Pitàgores i es compara $8^2 = 64$ amb $3^2 + 6^2 = 9 + 36 = 45$.

Com que 64 és més alt que 45, es conclou que el triangle és obtusangle.

- 12.** En el triangle de la figura calculeu la hipotenusa, les projeccions dels catets i l'altura.

Aplicant el *Teorema de Pitàgores*:

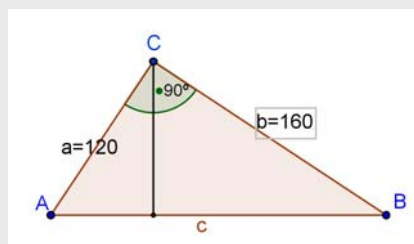
$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{120^2 + 160^2} = 200$$

Aplicant el *Teorema del catet*:

$$p_c(a) = 120^2 / 200 = 72 \text{ y } p_c(b) = 200 - 72 = 128$$

Amb el *Teorema de l'altura*:

$$\text{alt} = \sqrt{72 \cdot 128} = 96$$



- 13.** Comproveu que si M, N ($M > N$) són dos valors sencers ($M^2 - N^2$, $2MN$, $M^2 + N^2$) és una terna pitagòrica.

Prenem, per exemple, $M = 3$, $N = 2$ i substituïm $M^2 - N^2 = 5$, $2MN = 12$, $M^2 + N^2 = 13$

Ara comprovem que és pitagòrica: $5^2 + 12^2 = 169 = 13^2$

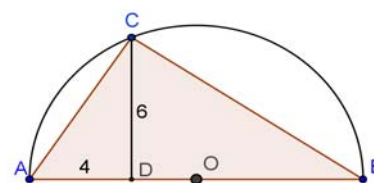
Altres ternes pitagòriques que podeu comprovar: 3, 4, 5 ; 7, 24, 25 ; 8, 15, 17 ; etc

- 14.** Calculeu el radi de la semicircumferència de la figura.

Si apliquem el teorema de l'altura, $6^2 = 4 \cdot p \Rightarrow p = 9$

Després el diàmetre = $9 + 4 = 13$

i el radi = 6,5

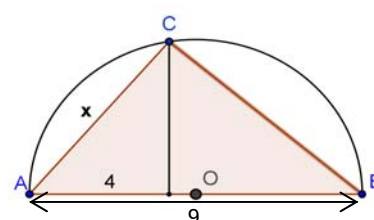


- 15.** Calculeu la mesura del catet x en la figura.

Pel teorema del catet,

$$x^2 = \text{diàmetre} \cdot 4 = 9 \cdot 4 = 36$$

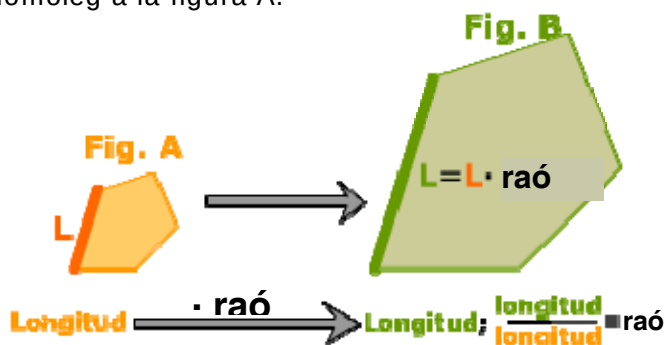
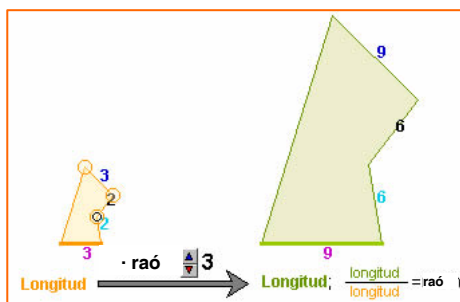
Per tant, $x = 6$



3. Raó de semblança

Longituds

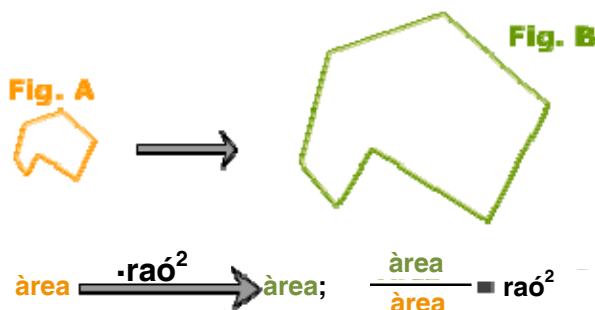
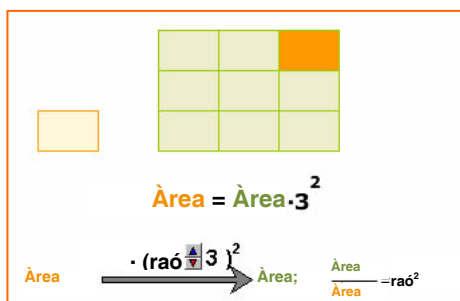
Si dues figures A i B són semblants, es diu raó de semblança de la figura B sobre l'A al quocient entre la longitud d'un segment de la figura B i la del seu homòleg a la figura A.



La raó de semblança defineix l'homotècia que transforma la figura A en la B.

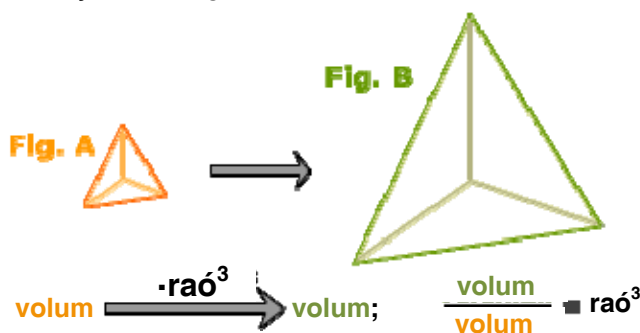
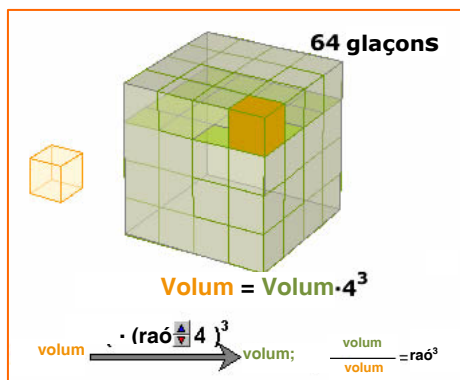
Àrees

Si Si dues figures A i B són semblants, el quocient entre l'àrea de B i l'àrea d'A és el quadrat de la raó de semblança de la figura B sobre l'A.



Volums

Si dues figures A i B són semblants, el quocient entre el volum de B i el d'A és el cub de la raó de semblança de la figura B sobre l'A.

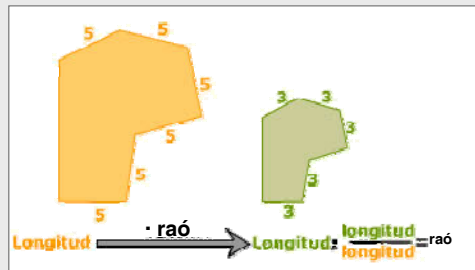


Exercicis resolts

- 16.** Quina és la raó d'una semblança que converteix un segment de longitud 5 m en un altre de longitud 3 m?

La raó de semblança és el quocient entre longituds homòlogues.

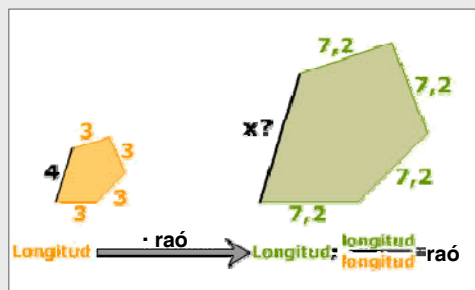
$$\text{Raó} = 3/5 = 0,6$$



- 17.** Calculeu la longitud del segment homòleg al de 4 m, sabent que en aplicar la semblança d'aquesta mateixa raó, un segment de 3 m es transforma en un de 7,2 m.

$$\text{Raó} = 7,2/3 = 2,4$$

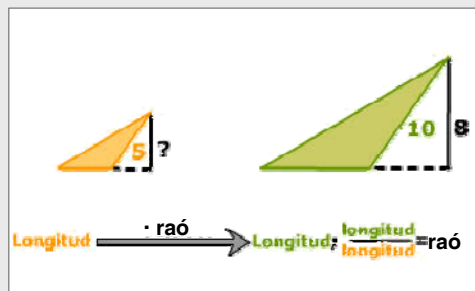
$$x = 4 \cdot \text{raó} = 4 \cdot 2,4 = 9,6 \text{ m}$$



- 18.** En una semblança un segment de 5 m es transforma en un altre de 10 m. En la figura transformada hi ha un segment de longitud 8 m. Quina és la longitud del segment del qual prové?

$$\text{Raó} = 10/5 = 2$$

$$x \cdot \text{raó} = 8 \Rightarrow x \cdot 2 = 8; \quad x = 4$$

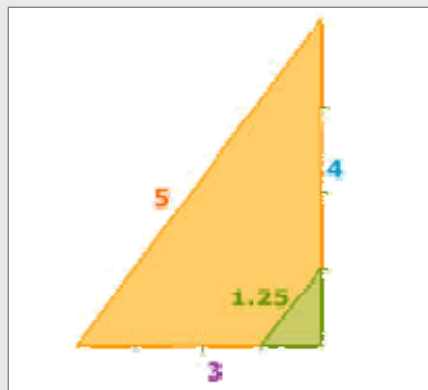


- 19.** Dibuixeu al vostre quadern un triangle rectangle de catets 3 i 4 cm i apliqueu-li una semblança de raó $\frac{1}{4}$ per obtenir un altre semblant. Calculeu la longitud de la hipotenusa en cada triangle.

Pel teorema de Pitàgores:

$$\text{hipotenusa} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

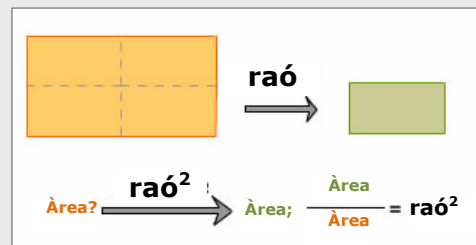
Si apliquem la semblança de raó $\frac{1}{4}$,
hipotenusa = $5 \cdot \frac{1}{4} = 1,25$



Exercicis resolts

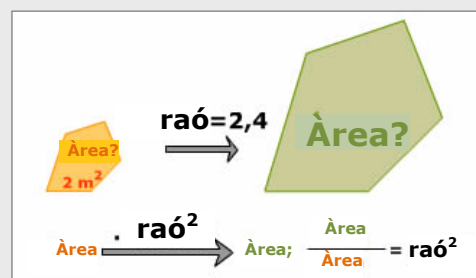
20. Quina és la raó d'una semblança que converteix una figura en una altra amb una àrea que fa la quarta part d'aquesta?

$$\text{raó}^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{raó} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



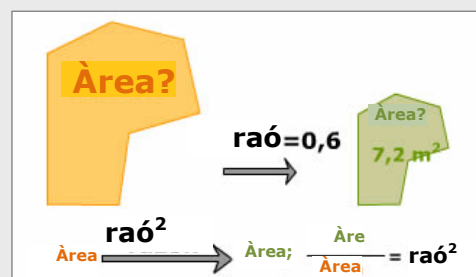
21. Quina àrea té una figura que s'obté d'aplicar a una altra d'àrea 2 m^2 una semblança de raó 2,4?

$$\text{Àrea} = 2 \text{ m}^2 \cdot \text{raó}^2 = 2 \cdot 2,4^2 = 11,52 \text{ m}^2$$



22. En una semblança de raó 0,6 s'obté una figura d'àrea $7,2 \text{ m}^2$ quina és l'àrea de la figura inicial?

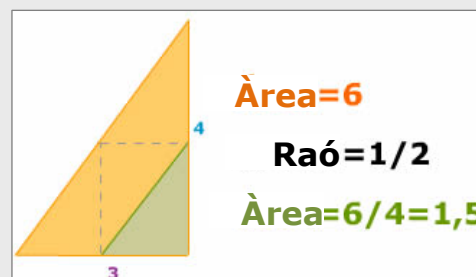
$$\text{Àrea} = \frac{7,2 \text{ m}^2}{0,6^2} = 20 \text{ m}^2$$



23. Dibuixeu al vostre quadern un triangle rectangle de catets 3 i 4 cm i un altre semblant però amb una àrea que sigui la quarta part d'aquesta.

Si l'àrea és la quarta part, la raó de semblança que aplicarem serà:

$$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$



24. El volum d'una casa és de 1.200 m^3 i en una maqueta aquesta casa ocupa 150 dm^3 . Quina és l'escala de la maqueta?

El quocient dels volums és el cub de la raó, $r^3 = \frac{150 \text{ dm}^3}{1200 \text{ m}^3}$

Si passem el denominador a dm^3 i ho simplifiquem queda: $r = \sqrt[3]{\frac{1}{8000}} = \frac{1}{20}$

4. Aplicacions

Escala

Els mapes o plànols d'habitatges solen indicar l'escala d'aquesta manera

1:2500000 en algun mapa de carreteres

o 1:250 en el plànol d'un habitatge.

Per saber aplicar les escales a longituds àrees i a volums només s'han de recordar les següents fórmules

Escala=1:l

l = Distància real /Distància en el plànol

l²= Àrea real /Àrea en el plànol

l³= Volum real/Volum en maqueta

- 1) Calcular l'escala del pla de la figura 1

$$\frac{\text{Distància real}}{\text{Distància pla}} = \frac{6844 \text{ cm}}{3,2 \text{ cm}} = 2139$$

Escala= 1:2139

- 2) L'escala és 1:120, quina és la superfície real del saló de la casa?

$$6 \cdot 4 \cdot 120^2 = 345600 \text{ cm}^2 = 34,56 \text{ m}^2$$

- 3) El volum real d'una de les torres són 139.650 m³ si l'escala és 1:700, quin és el volum de la maqueta?

$$\text{Volum de la maqueta: } \frac{139650}{700^3} = 407,14 \text{ cm}^3$$

Distàncies inaccessibles

Com ja va fer Tales en calcular l'altura de la piràmide mesurant-ne l'ombra, podem aplicar la semblança al càlcul de distàncies inaccessibles.

Anteriorment, ja vam veure com calcular la distància a un vaixell o a un punt inaccessible.

- 4) Es vol calcular la distància entre els punts A i B, per a això han pres les mesures de la figura: QM = 1 m, XM = 0,69 m i QB = 5,67 m

$$\text{Aplicant el teorema de Tales: } \frac{x}{QB} = \frac{QM}{XM}$$

$$\text{Amb el qual } x = 5,67 \cdot 0,69 = 3,91 \text{ m}$$

- 5) Quina és la longitud del fil de pescar?

Amb el teorema de Pitàgores calculem la longitud de la canya fins al punt de suport:

$$a = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\text{i aplicant la semblança: } \frac{x - 4,3}{3} = \frac{7}{5}$$

$$\text{obtenim: } x = 8,5 \text{ m}$$



Fig.1

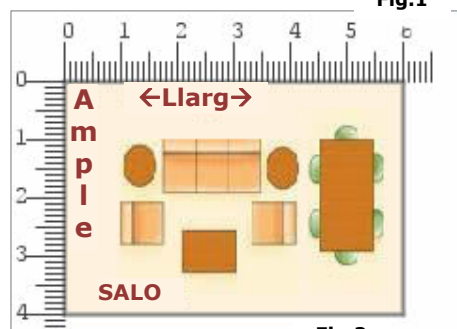


Fig.2



Fig.3

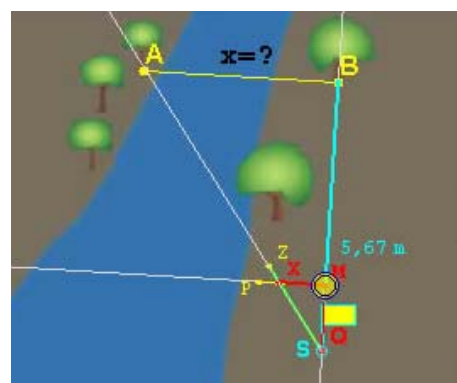


Fig.4

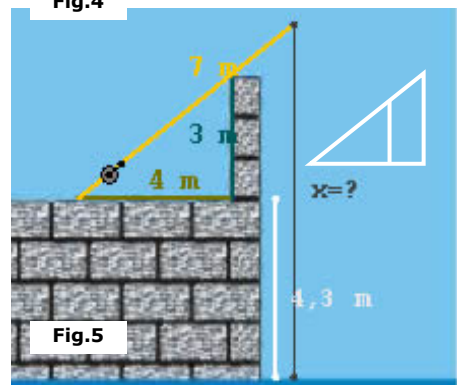
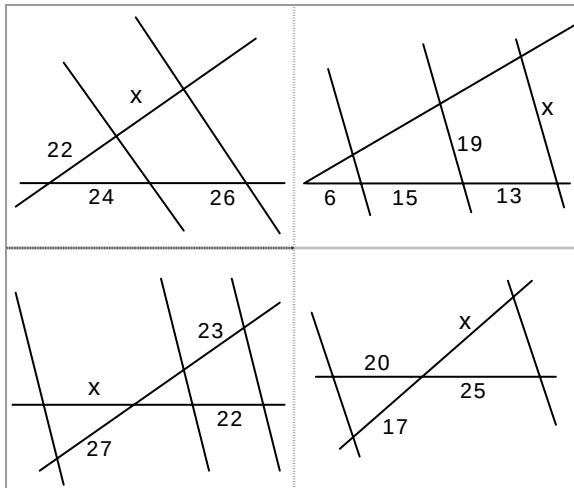


Fig.5



Per practicar

1. Trobeu x en cada cas

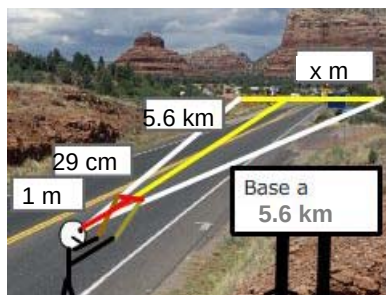


2. Les mesures de tres costats homòlegs de dos quadrilàters semeblants són:

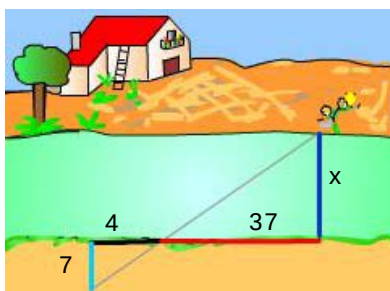
4 cm	x cm	7 cm
20 cm	10 cm	y cm

Trobeu x i y

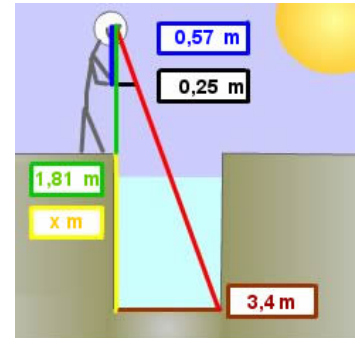
3. La base de la muntanya s'observa, com indica el cartell, a una distància de 5,6 km. Es mou un regle de 29 cm fins que tapa base de la muntanya. En aquell moment, la distància del regle a l'ull de l'observador és de 1 m. Calculeu l'amplada de la base de la muntanya.



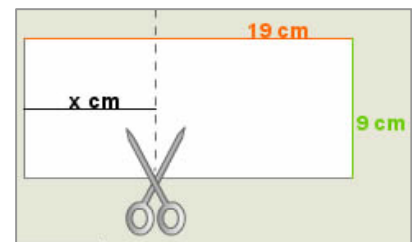
4. Calculeu en metres l'amplada x del riu, basant-vos en les dades del dibuix.



5. Calculeu la profunditat del pou.



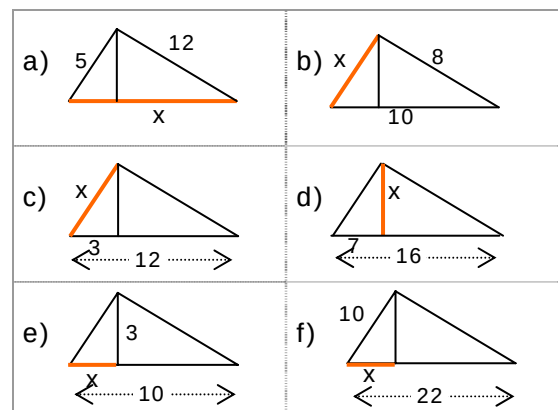
6. ¿Por on s'ha de tallar el full perquè la part esquerra sigui semblant al full sencer?.



7. Dibuixeu al vostre quadern un triangle amb un angle de 69° i un dels costats que el formen de 9 cm. ¿Són semblants els triangles que compleixen aquestes condicions?

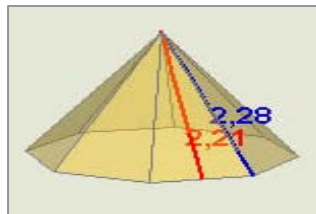
8. Dibuixeu al vostre quadern un triangle amb un angle de 56° i el quocient dels costats que el formen igual a 3. ¿Són semblants els triangles que compleixen aquestes condicions?

9. Calculeu el valor de x en cada triangle:

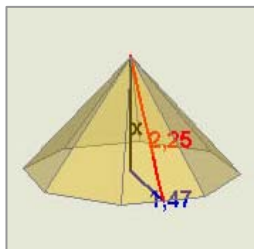
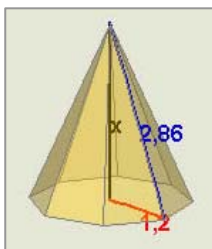


Semblança

10. Calculeu el costat de la base de la piràmide



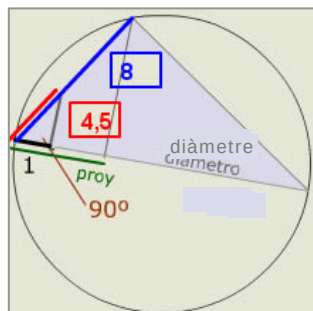
11. Calculeu l'altura de la piràmide en cada cas.



12. En una plaça de bous es pot calcular el seu diàmetre, mesurant només uns metres. En direcció d'un diàmetre (ho defineix la visual amb els espectadors de davant) es mesuren 9m i girant 90° s'avança en aquesta direcció fins al carreró, resultant la mesura d'aquest recorregut igual a 28,3 m. Calculeu el diàmetre de l'arena de la plaça de bous.

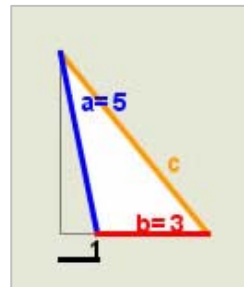


13. Calculeu el diàmetre de la circumferència de la figura

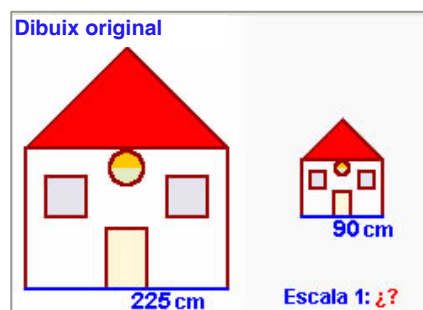


14. Trobeu la distància entre els punts de coordenades $(-1,-1)$ i $(-4,3)$.

15. Apliqueu el teorema generalitzat de Pitàgores per calcular la mesura del costat c en el triangle de la figura.

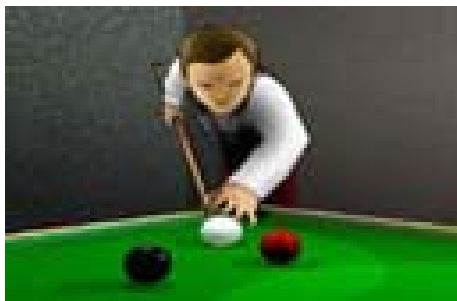


16. A la figura es veu una còpia del dibuix original. ¿Quina és l'escala de la còpia?



17. En mesurar sobre el mapa amb el curvímetre la distància per carretera entre dos pobles obtenim 9,5 cm, l'escala del mapa és 1:470000. Quants quilòmetres té la carretera que uneix aquests dos pobles?
18. En observar un mapa d'escala 1:210000 descobrim que falta un poble, B , en una carretera. Si sabem que B dista 73,3 km d'un altre poble A que veiem al mapa, a quants cm d' A per la carretera del mapa col·locarem el punt que representi B ?
19. El volum d'una torre és de 2925 m^3 . Calculeu el volum en una maqueta d'escala 1:500.
20. L'àrea de la base d'una torre és de 275 m^2 . Calculeu l'àrea d'aquesta en una maqueta d'escala 1:350.
21. L'àrea d'una torre és de 125 m^2 i en una maqueta ocupa una superfície de 55 cm^2 . Trobeu l'escala de la maqueta.
22. L'àrea de la base de la torre de la figura és de 25 cm^2 en una maqueta d'escala 1:350. Calculeu l'àrea real de la base.
23. El volum d'una torre és de 3300 m^3 i en una maqueta ocupa un volum de 412 cm^3 . Trobeu l'escala de la maqueta.
24. El volum de la torre de la figura és de 27 cm^3 en una maqueta d'escala 1:450. Calculeu el volum real de la torre.

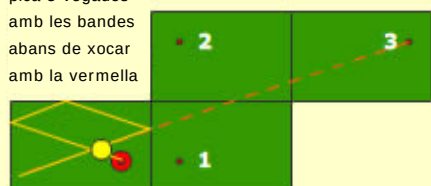
Per saber-ne més



Billar a tres bandes

Construïm els rectangles iguals al billar i després els punts simètrics a la bola vermella. El camí més curt entre dos punts és la línia recta que en doblegar-la al billar ens dona el recorregut que volem.

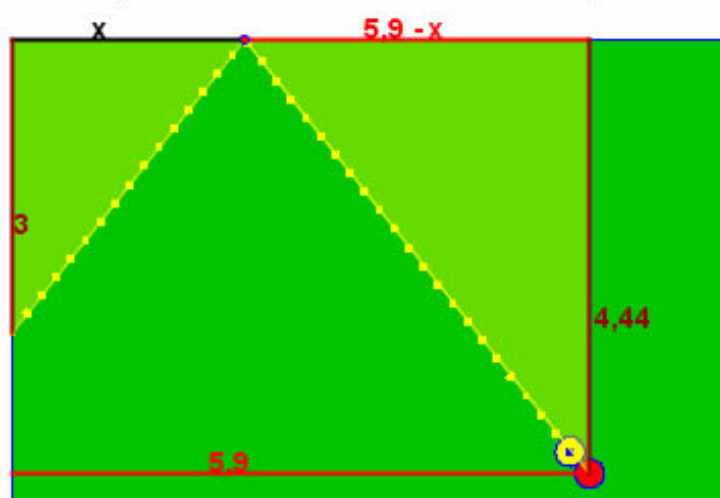
La bola groga
pica 3 vegades
amb les bandes
abans de xocar
amb la vermella



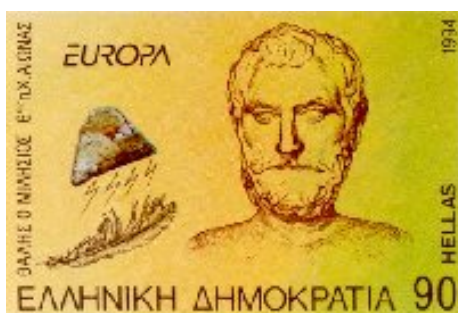
Com assegurar la carambola a una banda?

Com que la bola incideix a la banda amb el mateix angle que rebota, s'ha d'aconseguir que els triangles siguin semblants, i això es pot aconseguir a ull! o amb precisió resolent l'equació de proporcionalitat associada a la semblança

$$\frac{x}{3} = \frac{5,9 - x}{4,44} \Rightarrow 4,44 \cdot x = 3 \cdot (5,9 - x); \quad x = \frac{3 \cdot 5,9}{3 + 4,44} = 2,37$$



Geometria grega



La tradició atribueix a Tales (600 anys abans de la nostra era) la introducció a Grècia de la geometria egípcia. Tales va ser un precursor sobretot preocupat de problemes pràctics (càlcul d'altures de monuments amb ajuda d'un bastó i de la proporcionalitat de les ombres).

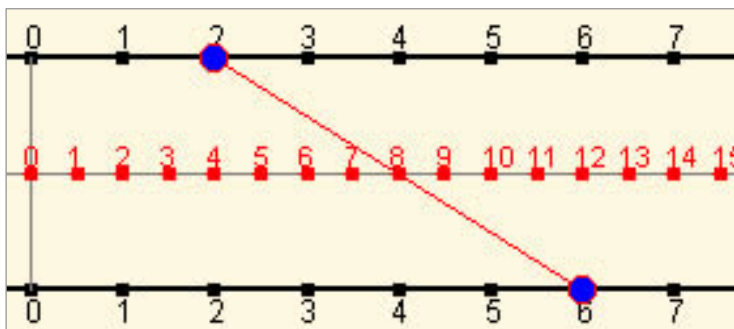
La geometria grega, que va ser un èxit sorprenent de la ciència humana i que va oferir proves d'un enginy excepcional, va estar marcada per dues escoles: la de Pitàgores i la d'Euclides.

Mostra'n més a:

http://perso.orange.fr/therese.eveilleau/pages/hist_mat/textes/h_geom.htm

Amb el teorema de Tales es poden fer "geomètricament" les operacions bàsiques, en la imatge veiem un calculadora geomètrica per sumar.

Es basa en què l'abscissa del punt mig d'un segment és la semisuma de les abscisses dels extrems.



Semblança



Recordeu el més important

Figures semblants

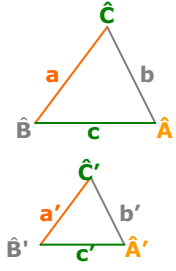
Si es pot passar d'una a una altra mitjançant una homotècia i moviments.

Polígons semblants

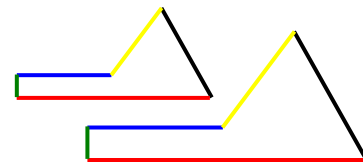
Quan tenen els angles iguals i els costats proporcionals

Triangles semblants

En el cas dels triangles, n'hi ha prou que es compleixi un dels tres criteris:

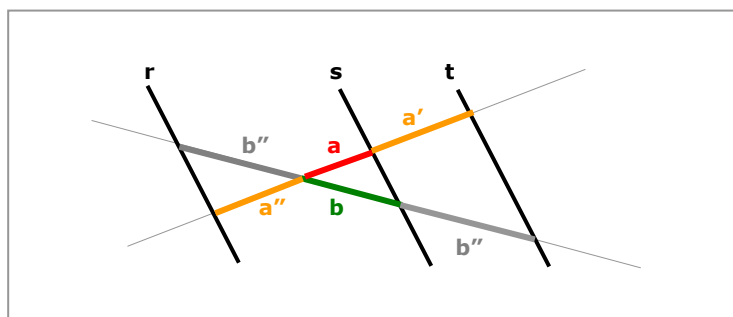


1. Angles iguals (amb dos n'hi ha prou)
 $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\hat{B} = \hat{B}'$
2. Un angle igual i els costats proporcionals que el formen
 $\hat{A} = \hat{A}'$ y $\frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$
3. Costats proporcionals
 $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$





$$\frac{\text{Longitud en B}}{\text{Longitud en A}} = \text{raó}$$
$$\frac{\text{Àrea en B}}{\text{Àrea en A}} = \text{raó}^2$$
$$\frac{\text{Volum en B}}{\text{Volum en A}} = \text{raó}^3$$

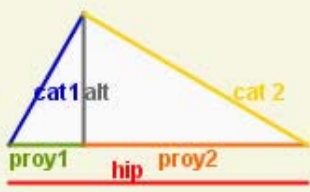


Teorema de Tales

Els segments que determinen rectes paral·leles en dues secants són proporcionals.

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

Teoremas en triangles rectangles



Teorema del CATET
 $\text{cat1}^2 = \text{proy1} \cdot \text{hip}$

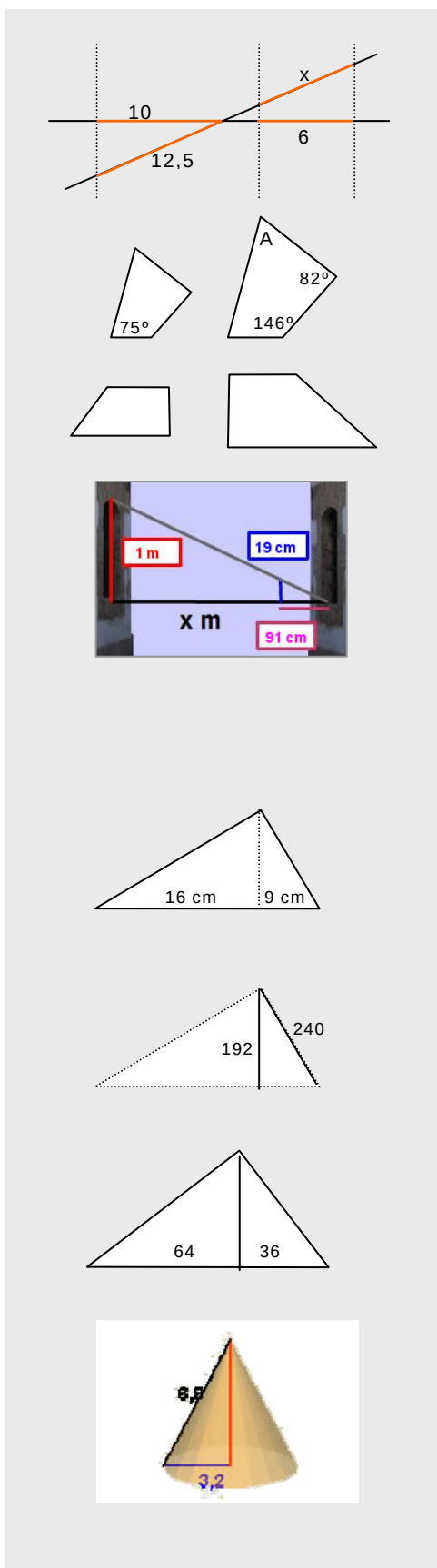
Teorema de l'ALTURA
 $\text{alt}^2 = \text{proy1} \cdot \text{proy2}$

Teorema de PITÀGORES
 $\text{cat1}^2 + \text{cat2}^2 = \text{hip}^2$

Teorema de Pitàgores generalitzat

$$\text{Si } C > 90^\circ \quad c^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot p_a(b)$$

$$\text{Si } C < 90^\circ \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2a \cdot p_a(b)$$



1. Apliqueu la semblança per calcular el valor de x .
2. Sabent que els angles interiors d'un quadrilàter sumen 360° , calculeu el valor de A .
3. Els polígons de la figura, són semblants?
4. Com que la finestra de la casa de davant és igual que la meva, puc saber la seva altura, i amb la visual d'una vareta, es pot calcular l'amplada del carrer. Calculeu-la.
5. Si els costats d'un triangle mesuren 6, 8 i 11 cm, de quin tipus és el triangle?
6. Calcula el perímetre d'un triangle rectangle en el qual les projeccions dels catets sobre la hipotenusa mesuren 16 i 9 cm.
7. Trobeu la hipotenusa del triangle rectangle amb un catet de 240 cm i l'altura sobre la hipotenusa és de 192 cm
8. Calculeu l'àrea en cm^2 d'un triangle rectangle en què les projeccions dels catets sobre la hipotenusa mesuren 64 i 36 cm.
9. La generatriu d'un cono recte mesura 6,8 cm i el radi de la base 3,2 cm. Trobeu l'altura del con semblant a aquest, però realitzat a escala 1:2.
10. Calculeu l'àrea en m^2 d'un pis del que tenim un plànol a escala 1:300, sabent que el pis en el plànol ocupa 17 cm^2 .

Solucions dels exercicis per practicar

1. a) 23,83 b) 30,76
c) 25,82 d) 21,25

2. $x=2$ $y=35$

3. 1624 m

4. 64,75

5. 5,94 m

6. 4,26 cm

7. No han de ser semblants

8. Són semblants

9. a) 13 b) 6 c) 6

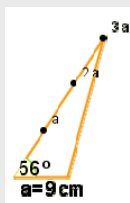
d) $\sqrt{63} \approx 7,9$ e) 1 f) $4,54$

10. 1,12

11. 2,59 1,70



Prob. 7



Prob. 8

12. 97,98 m

13. 36

14. 5

15. $c^2 = a^2 + b^2 + 2b \cdot p_b(a) = 40$;
 $c = \sqrt{40} \approx 6,32$

16. 1:2,5

17. 44,65 km

18. 34,90 cm

19. $23,4 \text{ cm}^3$

20. $22,44 \text{ cm}^2$

21. $150,75 \text{ cm}^2$

22. $306,25 \text{ cm}^2$

23. 1:200

24. $2460,37 \text{ m}^3$

Solucions de l'AUTOAVALACIÓ

1. 7,5

2. 57°

3. No són semblants

4. $91/19 \text{ m} = 4,78 \text{ m}$

5. Obtusangle $11^2 > 6^2 + 8^2$

6. 60 cm

7. 400 cm

8. 4800 cm^2

9. 3 cm

10. 153 m^2

No us oblideu d'enviar les activitats al tutor o tutor ►