

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Resoldre equacions de segon grau completes i incompletes.
- Resoldre equacions biquadrades i d'altres que es poden reduir a una de segon grau.
- Resoldre sistemes d'equacions lineals fent servir els diferents mètodes.
- Resoldre sistemes d'equacions de segon grau.
- Aplicar el llenguatge de l'àlgebra a la resolució de problemes.

Abans de començar.

1. Equacions de segon grau.....pàg. 58
 Completes $ax^2+bx+c=0$
 Incompletes $ax^2+c=0$, $ax^2+bx=0$
 Discriminant i solucions
 Biquadrades
 Racionals
 Irracionals
2. Sistemes d'equacions lineals.....pàg. 61
 Solució d'un sistema
 Sistemes compatibles
 Mètode de substitució
 Mètode d'igualació
 Mètode de reducció
3. Sistemes de segon grau.....pàg. 63
 Sistema $ax+by=c$ $xy=k$
 Sistema $a_0x^2+b_0y^2=c_0$ $a_1x+b_1y=c_1$
4. Aplicacions pràctiques.....pàg. 64
 Resolució de problemes

Exercicis per a practicar

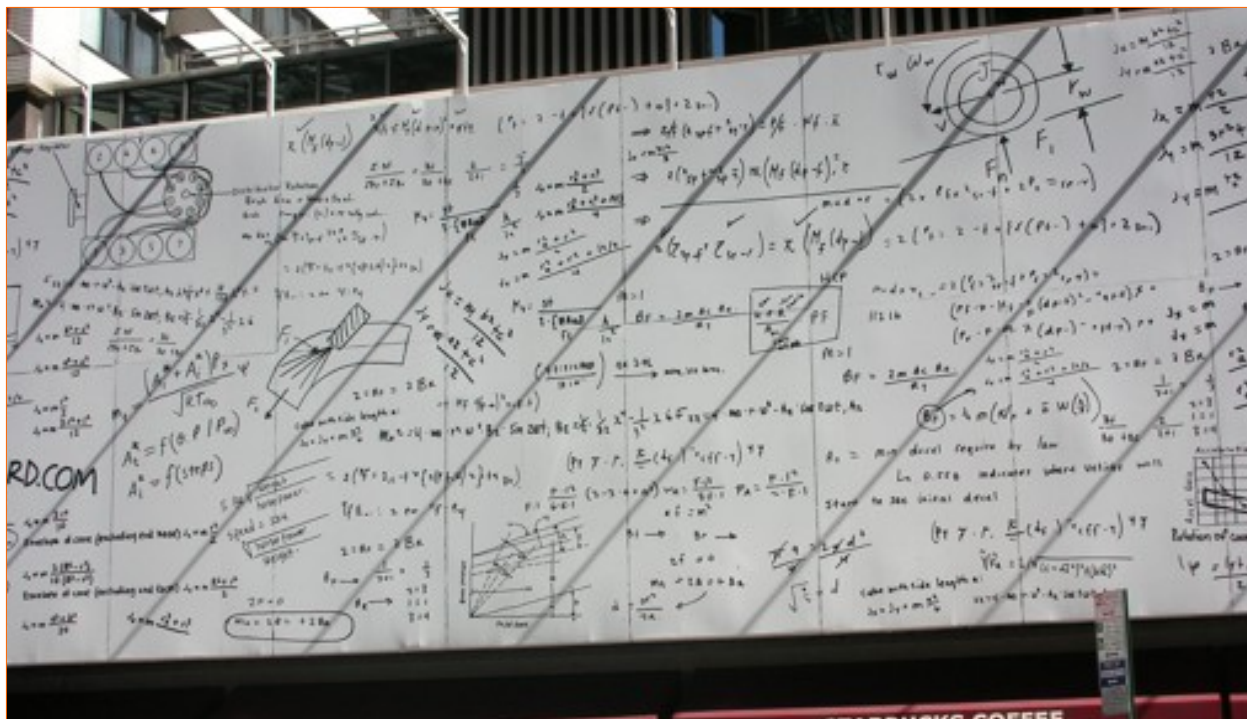
Per a saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Activitats per a enviar al tutor

Abans de començar



Molts problemes pràctics a la vida real conduïxen a la resolució d'una equació o d'un sistema d'equacions. Traduir al llenguatge de l'àlgebra és imprescindible en aquests casos; el llenguatge algebraic ens serveix per expressar amb precisió relacions difícils de transmetre amb el llenguatge habitual.

Proveu a fer a algun amic el joc que proposa el mag, per endevinar el número pensat n'hi ha prou restant 1000 al resultat que us doni i dividir-lo per 100, com podeu comprovar si plantegeu una equació:

Penseu un nombre	x
Dupliqueu-lo	$2x$
Afegiu-hi 5 unitats	$2x + 5$
Multipliqueu-lo per 5	$5 \cdot (2x + 5)$
Sumeu-hi 75 unitats	$5 \cdot (2x + 5) + 75$
Multipliqueu-lo tot per 10	$10 \cdot [5 \cdot (2x + 5) + 75]$
$10 \cdot [5 \cdot (2x + 5) + 75] = \text{resultat}$	
$10 \cdot (10x + 25 + 75) = \text{resultat}$	
$10 \cdot (10x + 100) = \text{resultat}$	
$100x + 1000 = \text{resultat}$	
$x = (\text{resultat} - 1000) / 100$	

Amb àlgebra és fàcil

Penseu un nombre, dupliqueu-lo, afegiu-hi 5 unitats, multipliqueu-lo per 5, sumeu-hi 75 unitats y multipliqueu-lo tot per 10.

Escriuiu el resultat i premeu Retorn

Equacions i sistemes

1. Equacions de segon grau

Les equacions de segon grau tenen la forma:

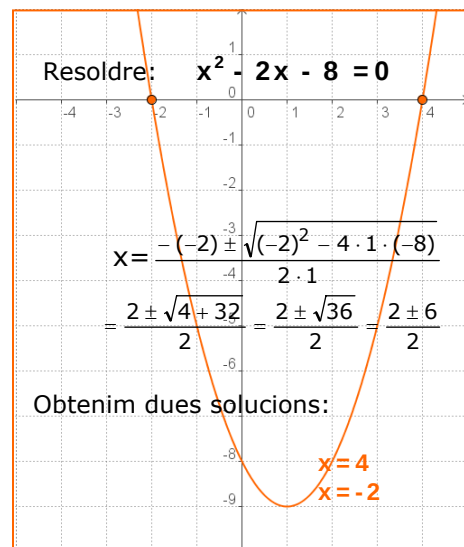
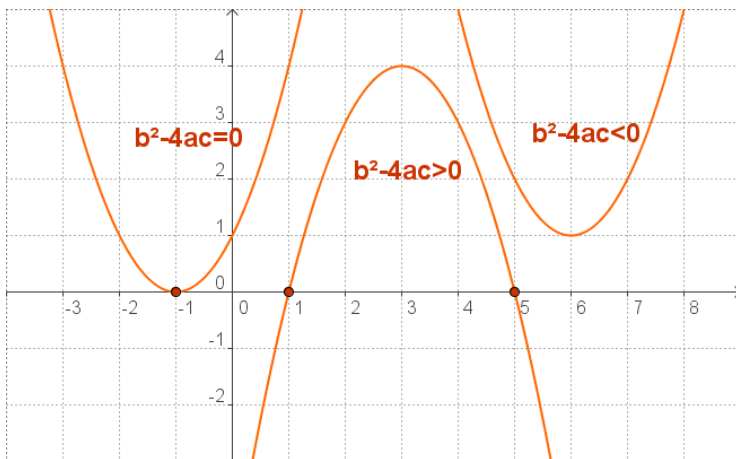
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Es resolen aplicant la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

El nombre de solucions de l'equació de segon grau depèn del signe del discriminant:

- Si $b^2 - 4ac > 0$ hi ha dues solucions diferents.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ hi ha una solució doble: $x = -b/2a$
- Si $b^2 - 4ac < 0$ no hi ha solució.



Com se n'obté la fórmula?

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Es passa c a l'altre membre:

$$ax^2 + bx = -c$$

Es multiplica per 4a:

$$4a^2x^2 + 4abx = -4ac$$

Se suma b^2 :

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$$

El primer membre és un quadrat:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

S'extreu l'arrel:

$$2ax + b = \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

S'aïlla x:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Equacions Incompletes

Si b o c, o tots dos són zero direm que l'equació és incompleta.

En aquests casos, seguir els passos que s'indiquen a continuació és més útil que aplicar la fórmula.:

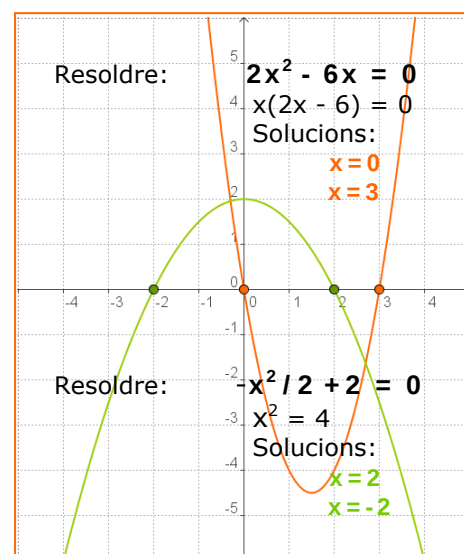
- Si $b=0$ $ax^2 + c = 0 \Rightarrow ax^2 = -c \Rightarrow x^2 = -c/a$

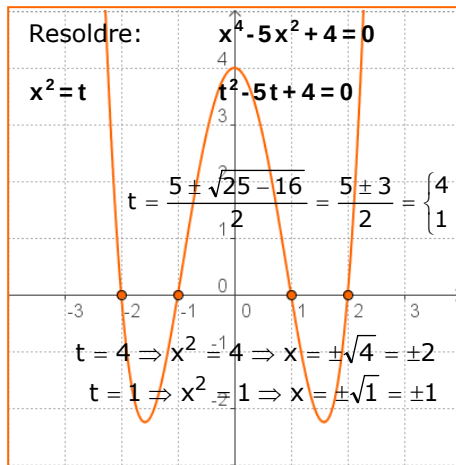
$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

- Si $-c/a > 0$ hi ha dues solucions
- Si $-c/a < 0$ no hi ha solució.

- Si $c=0$ $ax^2 + bx = 0$

traiem el factor comú de $x(ax+b)=0$
 $\Rightarrow x=0$, $x=-b/a$ de la qual cosa es dedueixen les dues solucions.





Ecuaciones bicuadradas

Són equacions que presenten la forma: $ax^4 + bx^2 + c = 0$

Per resoldre-les es fa el canvi $x^2 = t$, L'equació es transforma en una de segon grau amb incògnita t : $at^2 + bt + c = 0$

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{t_1} \\ x = \pm\sqrt{t_2} \end{cases}$$

A continuació veiem algunes equacions que es transformen en una de segon grau. Als exercicis resolts podeu veure més exemples.

Racionals

Una equació que té la incògnita en el denominador és anomenada fraccionària o racional.

El procés per resoldre-la és treure denominadors, operar i resoldre l'equació final.

Cal eliminar de les solucions els valors que anul·len el denominador.

Resoldre: $x - \frac{2}{1-x} = 4$

Treure denominadors : $x(1-x) - 2 = 4(1-x)$

Operem: $x - x^2 - 2 = 4 - 4x$

Resolem: $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

Comprovem les solucions:

$x = 3$

$x = 2$

Són vàlides totes.

Resoldre: $\sqrt{x-1} + x = 7$

Deixem l'arrel en un costat: $\sqrt{x-1} = 7 - x$

Elevem al quadrat: $(\sqrt{x-1})^2 = (7-x)^2$

$x-1 = 49 - 14x + x^2$

Resolem: $x^2 - 15x + 50 = 0$

$x = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 200}}{2} = \frac{15 \pm 5}{2} = \begin{cases} 10 \\ 5 \end{cases}$

Comprovem les solucions:

$x = 10$ no és vàlida

$x = 5$ és la solució

Ecuaciones irracionales

Una equació que té la incògnita dins d'una arrel és anomenada irracional.

El procés per resoldre-la és, aïllar l'arrel, elevar al quadrat els dos termes de la igualtat, operar i resoldre l'equació final.

Cal comprovar si les solucions obtingudes verifiquen l'equació.

EXERCICIS resolts

1. Resoleu les equacions:

$$a) x^2 + 12x + 32 = 0 \quad x = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 128}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-12 \pm 4}{2} = \begin{cases} -8 \\ -4 \end{cases}$$

$$b) 9x^2 + 6x + 1 = 0 \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 36}}{18} = \frac{-6 \pm \sqrt{0}}{18} = \frac{-6}{18} = -\frac{1}{3}$$

2. Resoleu les equacions:

$$a) 2x^2 + 5x = 0 \quad x(2x+5)=0 \Rightarrow x=0, x=-5/2$$

$$b) 2x^2 - 32 = 0 \quad x^2=16 \Rightarrow x=\pm 4$$

3. Calculeu el valor de m perquè l'equació $x^2+mx+9=0$ tinga una solució doble.

El discriminant $\Delta=b^2-4ac$ ha de ser 0, $m^2 - 4 \cdot 9 = 0 \Rightarrow m^2=36$ i $m=\pm 6$
Si $m=6$, $x^2+6x+9=0$ i la solució $x=-3$; si $m=-6$, $x^2-6x+9=0$ i la solució $x=3$

4. Resoleu les equacions:

$$a) x^4 - 25x^2 + 144 = 0 \quad t^2 - 25t + 144 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{2} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} = \begin{cases} 16 \Rightarrow x = \pm 4 \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

$$b) x^4 + 9x^2 - 162 = 0 \quad t^2 + 9t - 162 = 0$$

$$x^2=t \quad t = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 648}}{2} = \frac{-9 \pm \sqrt{729}}{2} = \frac{-9 \pm 27}{2} = \begin{cases} -18 \Rightarrow \text{Sin sol.} \\ 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

5. Resoleu les equacions:

$$a) \frac{9-x}{1+3x} + \frac{3}{1-x} = -2 \quad (9-x)(1-x)+3(1+3x)=-2(1+3x)(1-x)$$

$$5x^2 - 3x - 14 = 0 \quad 9-9x-x+x^2+3+9x=-2+2x-6x+6x^2$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+280}}{10} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{10} = \frac{3 \pm 17}{10} = \begin{cases} 2 \\ -7/5 \end{cases}$$

Substituint en l'equació valen les dues solucions

$$b) \frac{1-x}{5(x+1)} - \frac{8}{x-2} = 1 \quad (x-2)(1-x)-8 \cdot 5(x+1)=5(x+1)(x-2)$$

$$6x^2 + 32x + 32 = 0 \quad x-2-x^2+2x-40x-40=5x^2+5x-10x-10$$

$$x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 768}}{12} = \frac{-32 \pm \sqrt{256}}{12} = \frac{-32 \pm 16}{12} = \begin{cases} -4 \\ -4/3 \end{cases}$$

Substituint en l'equació valen les dues solucions

6. Resoleu les equacions:

$$a) x+1-\sqrt{5x+1}=0 \quad x+1=\sqrt{5x+1}$$

$$(x+1)^2=(\sqrt{5x+1})^2 \Rightarrow x^2+2x+1=5x+1$$

$$x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x=0, x=3$$

Substituint en l'equació valen les dues solucions

$$b) \sqrt{3x+4}+2x=4 \quad \sqrt{3x+4}=4-2x$$

$$(\sqrt{3x+4})^2=(4-2x)^2 \Rightarrow 3x+4=16-16x+4x^2$$

$$4x^2-19x+12=0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8} = \frac{19 \pm \sqrt{169}}{8} = \frac{19 \pm 13}{8} = \begin{cases} 4 \\ 3/4 \end{cases}$$

Només val la solució $x=3/4$

2. Sistemes d'equacions

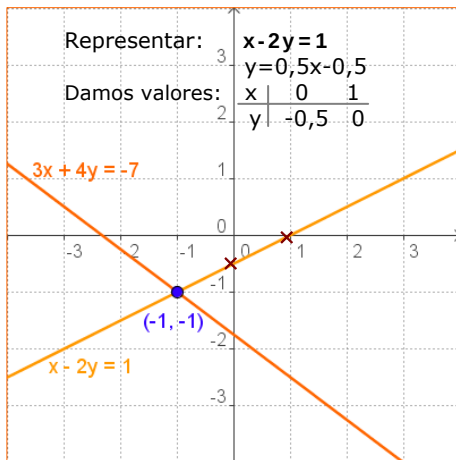
Un sistema d'equacions lineals és un conjunt d'equacions que s'han de satisfer simultàniament.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \quad a_1, b_1, a_2, b_2, c_1, c_2 \text{ són nombres reals}$$

La **solució** d'un sistema és un parell de valors (x, y) que verifiquen les dues equacions.

Dos sistemes con la misma solució se dicen **equivalentes**.

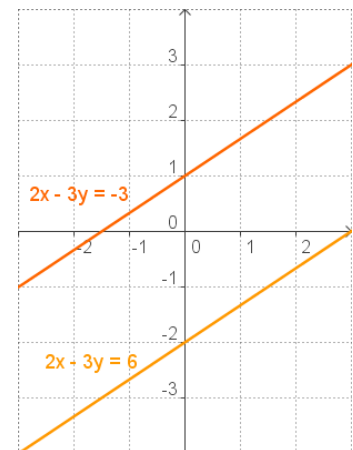
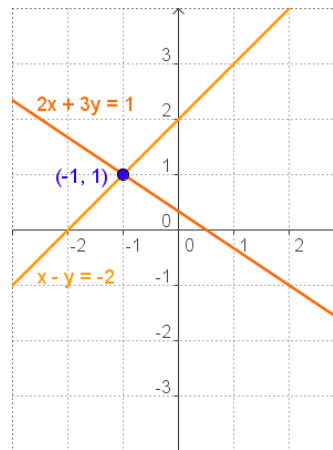
Els sistemes que tenen solució s'anomenen **compatibles** i els que no en tenen, **incompatibles**.



En un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada equació representa una recta en el pla.

Discutir un sistema és estudiar la situació d'aquestes rectes en el pla, que poden ser:

- Secants: el sistema té solució única; s'anomena **compatible determinat**.
- Coincidents: el sistema té solucions infinites; és **compatible indeterminat**.
- Paraleles, el sistema no tiene solució, se llama **Incompatible**.



Per tal de resoldre un sistema d'equacions utilitzem qualsevol dels tres mètodes següents:

Mètode de substitució

Consistix a aïllar una de les incògnites en una equació del sistema i substituir l'expressió obtinguda a l'altra, trieu en primer lloc la incògnita que voleu aïllar a l'equació més convenient.

Mètode d'igualació

Consistix a aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions. S'igualen les dues expressions que en resulten i es resol l'equació de primer grau amb una incògnita.

Mètode de reducció

Consistix a multiplicar una o les dues equacions per algun nombre de manera que obtinguem un sistema en què els coeficients de x o de y siguin iguals i de signe contrari, per eliminar la incògnita esmentada en sumar les dues equacions.

Resoldre:

$$\begin{cases} 3x + 4y = -7 \\ x - 2y = 1 \end{cases}$$

Per SUBSTITUCIÓ

Aïllem x en la 2a equació i substituïm en la 1a:
 $x = 1 + 2y$
 $3(1 + 2y) + 4y = -7$
 $3 + 6y + 4y = -7 \Rightarrow 10y = -10$
 $y = -1$
 $x = 1 + 2 \cdot (-1) = -1$

Per IGUALACIÓ

Aïllem x en ambdues equacions
i igulem: $\frac{-4y - 7}{3} = 1 + 2y$
 $-4y - 7 = 3(1 + 2y)$
 $-4y - 7 = 3 + 6y \Rightarrow -10y = 10$
 $y = -1$
 $x = -1$

Per REDUCCIÓ

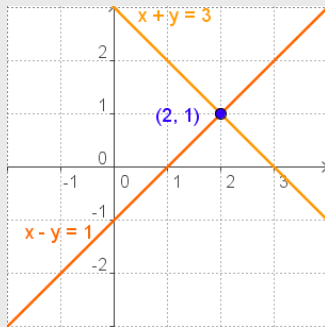
Multiplicuem per 2 $\rightarrow$

	$3x + 4y = -7$
	$2x - 4y = 2$
Sumant:	$5x = -5$
Després:	$x = -1$
I substituint:	$y = -1$

EXERCICIS resolts

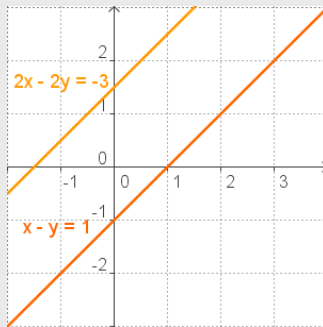
7. Representeu les rectes corresponents i discutiu els següents sistemes:

a) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



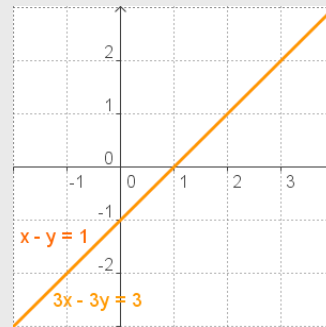
Compatible determinat

b) $\begin{cases} 2x - 2y = -3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Incompatible

c) $\begin{cases} 3x - 3y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$



Compatible indeterminat

8. Resoleu per substitució:

a) $\begin{cases} x + 4y = -25 \\ -10x - 5y = 5 \end{cases}$

Aïllem x en la 1a equació

$x = -25 - 4y$ substituïm en la 2a

$$-10(-25 - 4y) - 5y = 5 \Rightarrow 250 + 40y - 5y = 5$$

$$35y = -245 \Rightarrow y = -7$$

$$x = -25 - 4 \cdot (-7) = 3$$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 45 \\ -4x - y = -43 \end{cases}$

Aïllem y en la 2a equació

$y = -4x + 43$ substituïm en la 1a

$$3x + 5(-4x + 43) = 45 \Rightarrow 3x - 20x + 215 = 45$$

$$-17x = -170 \Rightarrow x = 10$$

$$y = -4 \cdot 10 + 43 = 3$$

9. Resoleu per igualació:

a) $\begin{cases} -4x + y = 20 & y = 20 + 4x \\ 6x - 9y = 0 & y = 6x / 9 \end{cases}$

$$20 + 4x = \frac{6x}{9} \Rightarrow 180 + 36x = 6x$$

$$30x = -180 \Rightarrow x = -6$$

$$y = -36/9 = -4$$

b) $\begin{cases} -3x - 4y = 31 & x = (31 + 4y) / -3 \\ 5x - 9y = 11 & x = (11 + 9y) / 5 \end{cases}$

$$\frac{31 + 4y}{-3} = \frac{11 + 9y}{5} \Rightarrow 5(31 + 4y) = -3(11 + 9y)$$

$$155 + 20y = -33 - 27y \Rightarrow 47y = -188 \Rightarrow y = -4$$

$$x = (11 - 36) / 5 = -5$$

10. Resoleu per reducció:

a) $\begin{cases} 5x - 10y = 25 \\ 8x + 2y = 4 \end{cases}$

$$5x - 10y = 25$$

Es multiplica per 5 $\rightarrow 40x + 10y = 20$

$$\text{Sumand: } 45x = 45$$

$$x = 1 \quad y = -2$$

b) $\begin{cases} 5x + 3y = 21 \\ 7x + 8y = 37 \end{cases}$

Es multiplica per -7 $\rightarrow -35x - 21y = -147$

Es multiplica per 5 $\rightarrow 35x + 40y = 185$

$$\text{Sumand: } 19y = 38$$

$$y = 2 \quad x = 3$$

11. Resoleu:

$$\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{5} = \frac{22}{15} \\ 7x - 7y = 28 \end{cases}$$

traient denominadors i simplificant la 2a equació, el sistema es converteix en un equivalent.

Per REDUCCIÓ:

$$5x - 3y = 22$$

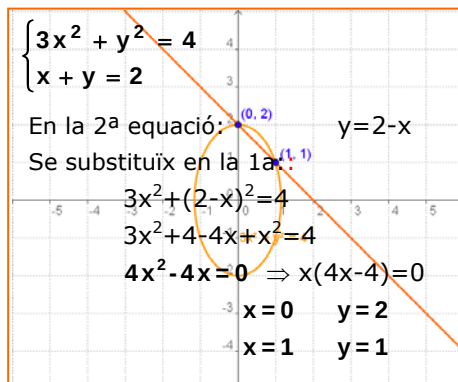
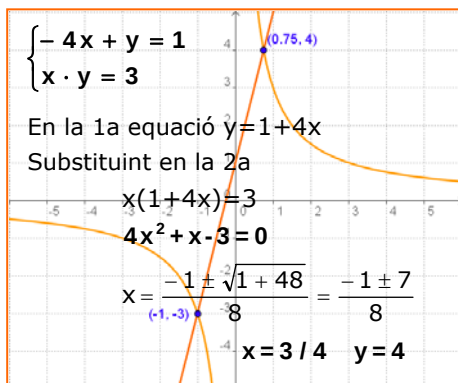
$$-3x + 3y = -12$$

$$2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

$$\begin{cases} 5x - 3y = 22 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 5 \quad y = 1$$

3. Sistemes de segon grau



Són sistemes en els quals una o les dues equacions no són lineals. Per a resoldre'ls apliquem els mètodes ja coneguts per a equacions de 2n grau i sistemes lineals. Vegem alguns exemples.

- Tipus
$$\begin{cases} ax + by = c_1 \\ x \cdot y = c_2 \end{cases}$$

- Tipus
$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Per resoldre sistemes d'aquest tipus s'aïlla la x o la y a una equació i se substitueix a l'altra. Es redueix i es resol l'equació que queda.

Finalment se substitueixen els valors trobats a l'equació aïllada per calcular-ne l'altra incògnita.

EXERCICIS resolts

12. Resoleu:

a)
$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$$

En la 1a equació: $x = y - 1$

En la 2a equació: $(y - 1)y = 20$

$$y^2 - y - 20 = 0$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \begin{cases} 5 & x = 4 \\ -4 & x = -5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2x + 3y = 30 \\ x \cdot y = 24 \end{cases}$$

En la 2a equació: $x = 24/y$

En la 1a equació: $48/y + 3y = 30$

$$3y^2 - 30y + 48 = 0 \Rightarrow y^2 - 10y + 16 = 0$$

$$y = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} = \begin{cases} 8 & x = 3 \\ 2 & x = 12 \end{cases}$$

13. Resoleu:

a)
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

En la 2a equació: $x = -y - 1$

En la 1a equació: $(-y - 1)^2 + y^2 = 41$

$$y^2 + 2y + 1 + y^2 = 41$$

$$2y^2 + 2y - 40 = 0$$

$$y = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 320}}{4} = \frac{-2 \pm 18}{4} = \begin{cases} 4 & x = -5 \\ -5 & x = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 7 \\ 2x + 3y = -1 \end{cases}$$

En la 2a equació: $x = (-1 - 3y)/2$

En la 1a equació: $\frac{(-1 - 3y)^2}{4} - 2y^2 = 7$

$$1 + 9y^2 + 6y - 8y^2 = 28 \quad y^2 + 6y - 27 = 0$$

$$y = \frac{-6 \pm \sqrt{36 + 108}}{2} = \frac{-6 \pm 12}{2} = \begin{cases} 3 & x = -5 \\ -9 & x = 13 \end{cases}$$

Equacions i sistemes

4. Resolució de problemes

Per resoldre un problema mitjançant una equació o un sistema d'equacions, cal traduir al llenguatge algebraic les condicions de l'enunciat i després resoldre l'equació o el sistema plantejat.

A continuació podeu veure alguns exemples.

- ✓ En una reunió cada assistent saluda tots els altres, si el nombre de salutacions que s'intercanvien és 28, quantes persones assisteixen a la reunió?

$x = n^{\circ}$ assistents

$$\frac{x(x-1)}{2} = 28 \Rightarrow x^2 - x = 56$$
$$\Rightarrow x^2 - x - 56 = 0$$
$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 224}}{2} = \frac{1 \pm 15}{2}$$

Obtenim $x = -14/2 = -7$ y $x = 16/2 = 8$
La solució negativa no és vàlida ja que es tracta de nombre de persones, després hi assisteixen 8 persones.

- ✓ Dues persones es troben tenint cada una un capital. L'una diu a l'altra: "Si em dones del que tens 3 unitats les afegisc al que tinc i en tindrem totes dues igual"; l'altra em replica: "Si tu em dones del que tens 6 unitats les afegisc al que tinc i en tindrà el doble del que et queda". Quant en té cadascuna?

A en té x $\begin{cases} x + 3 = y - 3 \\ 2(x - 6) = y + 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -6 \\ 2x - y = 18 \end{cases}$
B en té y

Resolem per reducció:

$$\begin{array}{r} -x + y = 6 \\ 2x - y = 18 \\ \hline x = 24 \\ y = 6 + x = 30 \end{array}$$

- ✓ Es vol tancar una finca rectangular, un dels costats de la qual dona a un riu. Si l'àrea de la finca és 2000m^2 i els tres costats que s'han de tancar mesuren 140m. Quines són les dimensions de la finca?

Dimensions: x (ample), y (llarg)

$$\begin{cases} 2x + y = 140 \\ x \cdot y = 2000 \end{cases}$$

En la 1a equació: $y = 140 - 2x$
Substituint en la 2a: $x \cdot (140 - 2x) = 2000$
Resolem l'equació: $2x^2 - 140x + 2000 = 0$
 $x = 50 \quad y = 40$
 $x = 20 \quad y = 100$

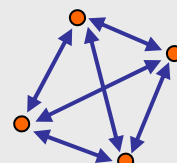
Per resoldre problemes

- 1º) Entendre l'enunciat.
- 2º) Identificar les incògnites.
- 3º) Traduir a llenguatge algebraic.
- 4º) Resoldre l'equació
- 5º) Comprovar la solució.

Nombre d'assistents: x

Cada un saluda tots els altres, que són: $x-1$
La salutació A $\rightarrow$ B és el mateix que la salutació B $\rightarrow$ A, per tant, el nombre total de salutacions:

$$x \cdot (x-1) / 2$$



Comprovació:

8 persones, cada una saluda a les altres 7;
 $8 \cdot 7 = 56$ i la meitat 28.

La persona A té: x
La persona B té: y

	B en fa 3 a A	A en fa 6 a B
A en té x	$x+3$	$x-6$
B en té y	$y-3$	$y+6$
	Les dues igual	B doble d'A

Parla A: $x+3 = y-3$
Parla B: $y+6 = 2(x-6)$

Comprovació:

	B en fa 3 a A	A en fa 6 a B
A: $x=24$	$24+3=27$	$24-6=18$
B: $y=30$	$30-3=27$	$30+6=36$
	Les dues igual	B doble d'A

x : ample
 y : llarg

Perímetre per a tancar:
 $2x + y = 140$ m
Superfície (base x altura):
 $x \cdot y = 2000$ m²

Comprovació:

$x=50 \quad y=40 \quad x \cdot y = 50 \cdot 40 = 2000$
 $x=20 \quad y=100 \quad x \cdot y = 20 \cdot 100 = 2000$



Per a practicar

1. Resoleu l'equacions:

- a) $-6x^2 - 7x + 155 = -8x$
- b) $3x^2 + 8x + 14 = -5x$
- c) $(x-6)(x-10)=60$
- d) $(x+10)(x-9)=-78$

2. Resoleu l'equacions:

- a) $x^4 - 24x^2 + 144 = 0$
- b) $x^4 + 14x^2 - 72 = 0$
- c) $x^4 - 81 = 0$
- d) $(x^2 - 8)(x^2 - 1) = 8$

3. Resoleu l'equacions:

- a) $\frac{9}{2-x} + \frac{4}{2-3x} = 5$
- b) $\frac{5+x}{2+2x} - \frac{2}{4-3x} = 2$
- c) $3-x - \frac{6x+6}{7x+5} = 1$
- d) $\frac{3+x}{3x+1} + \frac{x+2}{x+1} = 5$

4. Resoleu l'equacions:

- a) $2\sqrt{9x} - x = 9$
- b) $\sqrt{3+6x} - 2 = 4x$
- c) $2x - \sqrt{x-2} = 5$

5. Resoleu els sistemes:

- a) $\begin{cases} \frac{x}{5} - \frac{y}{4} = -\frac{3}{5} \\ 4x - 2y = 12 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} \frac{x}{4} - \frac{y}{8} = \frac{-3}{8} \\ 8x + 5y = 33 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = \frac{8}{3} \\ 7x + 3y = 34 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} \frac{x}{9} - \frac{y}{2} = \frac{4}{9} \\ 5x - 7y = 20 \end{cases}$

6. Resoleu els sistemes:

- a) $\begin{cases} x - 6y = -15 \\ x \cdot y = -9 \end{cases}$
- b) $\begin{cases} 2x + y = -18 \\ x \cdot y = 40 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x^2 - 3y^2 = -2 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$
- d) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 65 \\ x + y = 3 \end{cases}$

7. La diferencia de dos nombres és 4 i el seu producte és 192. Trobeu aquests nombres.

8. La suma dels quadrats de dos nombres naturals consecutius és 342, Quins nombres són?.

9. Si una fracció de numerador 3 se suma amb la seua fracció inversa s'obté 109/30, Quina fracció és?.

10. El quadrat d'un nombre més 6 és igual a 5 vegades el mateix nombre. Quin nombre és?

11. Trobeu un nombre positiu que 6 vegades la seua quarta 7 vegades el seu quadrat siga igual a 124.

12. L'edat d'en Joan era fa 9 anys l'arrel quadrada de la que tindrà d'ací 11 anys. Determineu-ne l'edat actual.

13. El numerador d'una fracció positiva és 4. Si afegim 9 unitats al denominador el valor de la fracció disminueix en una unitat. Quin és el denominador original?

14. Dues aixetes brollant juntes tarden a omplir un dipòsit 2 hores, Quant temps necessitaran separatament si una de les aixetes tarda 3 horas més que l'altra?

PISTA: x: Hores que tarda una aixeta. 1/x: Part de dipòsit que ompli.

15. Trobeu m perquè $x^2 - mx + 121 = 0$ tinga una solució doble.

16. Dos nombres sumen 400 i el més gran és igual a 4 vegades el més menut. Trobeu-los.

17. La Mercé va pagar 272 € per 4 entrades per a un concert i 8 entrades per al teatre. I la Lluïsa pagament 247 € per 9 entrades per a un concert i 3 entrades per al teatre. Quant costava cada entrada?

Equacions i sistemes

18. Trobeu dos nombres la suma dels quals és 241 i la seua diferència és 99.
19. Dos nombres sumen 400 i el major és igual a 4 vegades el menor, quins nombres són?
20. En Pere té un total de 52 bitllets, el valor dels quals és de 5 i 10 euros. Si en total té 790 €. Quants bitllets té de cada?
21. En un hotel d'67 habitacions hi ha habitacions individuals i dobles. Si el nombre total de llits és 92, quantes habitacions hi ha de cada tipus?
22. Un magatzem vol barrejar vi de 1 €/l amb vi de 3 €/l per obtenir una mescla de 1,2 €/l. Quants litres de cada classe s'han de barrejar per obtenir 2000 litres de mescla?
23. En un magatzem hi ha dos tipus de làmpades: les de tipus A, que utilitzen 2 bombetes, i les de tipus B, que utilitzen 7 bombetes. El magatzem té un total de 25 làmpades amb 160 bombetes. Quantes làmpades de cada tipus hi ha?
24. En un parc d'atraccions pujar a la sínia costa 1 € i pujar a la muntanya russa 4 €. Ana puja un total de 13 vegades i gasta 16 €, quantes vegades va pujar a cada atracció?
25. En un corral hi hay ovelles i gallines, i en total són 77 i si comptem les potes n'hi ha 274 en total. Quantes ovelles i gallines hi ha?
26. Trobeu un nombre de dues xifres, sabent que la suma d'aquests dos nombres és 7, i que la diferència entre el nombre i el que resulta en intercanviar les seues és 27.

PISTA: Si x és la xifra de les desenes i y és la xifra de les unitats, el nombre és $10x+y$, i el que resulta en intercanviar les xifres és $10y+x$
27. La suma de dos nombres naturals és 24 i el seu producte és 135, Trobeu aquests nombres.
28. Calculeu les longituds dels costats d'un rectangle sabent que la diagonal mesura 58 cm i el costat major supera en 2 cm el menor.
29. La suma de dos nombres naturals és 13 i la dels seus quadrats és 109, trobeu els nombres.
30. La diferència de dos nombres enters és 6 i el seu producte és 247. Trobeu aquests nombres.
31. La suma de les edats de dues persones és 18 anys i el seu producte és 77. Determineu l'edat de cada persona.
32. Determineu les longituds dels costats d'un triangle rectangle, sabent que el seu perímetre és 48 cm i la suma dels catets és 28 cm.
33. El producte de les dues xifres d'un nombre és 6 i la suma de les unitats amb 3 vegades les desenes és 16. Trobeu el nombre.
34. La suma de les àrees de dos quadrats és 100 cm^2 i la suma dels seus perímetres és 56 cm. Quant mesuren els seus costats?
35. Calculeu l'altura i la base d'un triangle isòsceles els costats iguals del mesuren 13 cm i l'altura és 2 cm més llarga que la base.

A l'hora de resoldre un problema referent a nombres o relacions abstractes de quantitats, no hi ha res com traduir aquest problema de l'anglès o una altra llengua al llenguatge de l'àlgebra

Newton (Aritmetica Universalis)



"L'inventor" de l'àlgebra

Al-Hwārizmī, que va viure aproximadament entre els anys 780-850 i va treballar a la Casa de la Saviesa a Bagdad.

Cinc de les seues obres han arribat fins a nosaltres, entre elles *al-Mujtasar fi hisab al-jabr wa'l muqabala*, el primer tractat d'àlgebra conegut.

Al-Hwārizmī classifica les equacions en sis tipus diferents i resol cada cas separatament fent servir mètodes geomètrics, com el de l'animació.

Clasificació de les equacions d'acord Al-Jwarizmi

- quadrat de la cosa=cosa
 $ax^2 = bx$
- quadrat de la cosa=núm.
 $ax^2 = c$
- cosa=núm.
 $ax = b$
- quadrat de la cosa+cosa=núm.
 $ax^2 + bx = c$
- quadrat de la cosa+núm.=cosa
 $ax^2 + c = bx$
- quadrat de la cosa=cosa+núm
 $ax^2 = bx + c$

$$x^2 + 8x = 33$$

2	x^2	$2x$	$2x$	$= 33 + 16$
x	$2x$	x^2	$2x$	
x	$2x$	x^2	$2x$	
2	x^2	$2x$	$2x$	

$$(x + 4)^2 = 49$$

$$x^2 + 8x = 33$$

$$x^2 + 4 \cdot 2 \cdot x = 33$$

$$x^2 + 2 \cdot 4x + 16 = 33 + 16$$

$$(x + 4)^2 = 49$$

$$x + 4 = 7 \quad x + 4 = -7$$

$$x = 3 \quad x = -11$$

Per què la x?

Els àrabs anomenaven la incògnita shay (cosa). La primera traducció es va fer al llatí a Espanya (Roberto de Chester, Toledo, 1145) i, com que la paraula àrab cosa sona molt similar a la x medieval, la van anomenar d'aquesta manera i encara hui continua anomenant-se'n. A Itàlia es va traduir com a cusi, es va abreujar com a co i els que resolien equacions eren anomenats *cosistas*.



Equacions i sistemes



Recordeu el més important

Equacions de segon grau

- Completes: $ax^2 + bx + c = 0$

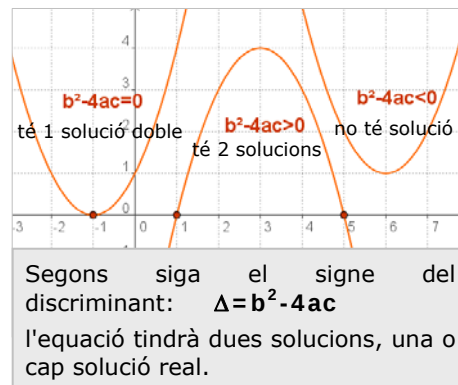
Es resolen amb la fórmula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

- Incompletes: $ax^2 + c = 0$

S'aïlla $x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$

- Incompletes: $ax^2 + bx = 0$

2 solucions: $x=0$, $x=-b/a$



Sistemes d'equacions

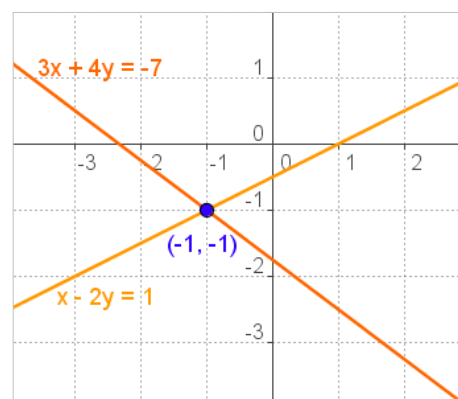
$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$ És un sistema d'equacions lineals amb dues incògnites, cada equació és una recta que podem representar en un sistema cartesià. El punt de tall (x,y) , si existix, serà la **solució** del sistema.

Per a resoldre un sistema emprem els mètodes de:

Substitució: Consistix a aïllar una de les incògnites en una equació del sistema i substituir l'expressió obtinguda a l'altra.

Igualació: Consistix a aïllar la mateixa incògnita a les dues equacions. S'igualen les dues expressions que en resulten.

Reducció: Consistix a multiplicar una o les dues equacions per algun nombre de manera que obtinguem un sistema en què els coeficients de x o de y siguin iguals i de signe contrari, per eliminar la incògnita esmentada en sumar les dues equacions.



- Si dos o més sistemes tenen la mateixa solució s'anomenen sistemes **equivalents**
- Un sistema és **compatible** si té solució, i **incompatible** si no la té.

Sistemes de 2n grau

Són sistemes en els quals una de les equacions o les dues són de segon grau en una de les incògnites o en les dues.

Habitualment es resolen aïllant una de les incògnites a l'equació de primer grau i substituint-la a l'altra, cosa que dóna lloc a una equació de 2n grau.

Per resoldre problemes

- ✓ Comprendre l'enunciat.
- ✓ Identificar les incògnites.
- ✓ Traduir al llenguatge algebraic
- ✓ Resoldre
- ✓ Comprovar les solucions

Autoavaluació



1. Resoleu l'equació: $3x^2 + 15x = 0$
2. Resoleu l'equació: $x^4 - 37x^2 + 36 = 0$.
3. Resoleu l'equació: $(x - 3)^2 = 21 - 6(8 - x)$.
4. Resoleu l'equació: $\frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = \frac{10}{3}$
5. Resoleu el sistema:
$$\begin{cases} \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 9 \\ 6x - 2y = 164 \end{cases}$$
6. Resoleu el sistema:
$$\begin{cases} \frac{4}{x} - \frac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$
7. Busqueu dos nombres naturals consecutius que la suma dels seus quadrats siga 1105.
8. Tenim 13 € en monedes de 2 € i de 50 cèntims. Si en total hi ha 14 monedes, quantes n'hi ha de cada tipus?
9. Per tancar una finca rectangular de 720 m² s'han utilitzat 112 m de tanca. Calculeu les dimensions de la finca.
10. Escriviu una equació de segon grau que la suma de les seues dues solucions siga 7 i el producte 12. Quines són aquestes solucions?

Equacions i sistemes

Solucions dels exercicis per a practicar

1. a) $x=5$, $x=-31/6$ b) $x=-2$, $x=-7/3$
c) $x=16$, $x=0$ d) $x=21$, $x=1$
2. a) $x=\pm\sqrt{12}$ b) $x=\pm 2$
c) $x=\pm 3$ d) $x=0$, $x=\pm 3$
3. a) $x=5$, $x=-2$ b) $x=19/9$, $x=0$
c) $x=1$, $x=-4/7$ d) $x=0$, $x=-9/11$
4. a) $x=9$ b) $x=-1/8$, $x=-1/2$
c) $x=3$, $x=9/4$ No és vàlida
5. a) $x=7$ $y=8$ b) $x=1$ $y=5$
c) $x=4$ $y=2$ d) $x=4$ $y=0$
6. a) $x=-3$ $y=3$; $x=-9/2$ $y=2$
b) $x=-5$ $y=-8$; $x=-4$ $y=-10$
c) $x=-5$ $y=3$; $x=-1$ $y=1$
d) $x=-4$ $y=7$; $x=7$ $y=-4$
7. 12 i 16 ó -16 i -12
8. 18 i 19
9. 3/10
10. 3 i 2
11. El denominador és 3
12. 14 anys
13. 24 (La solució negativa no val)
14. Una aixeta 3 h, i l'altra 2 h
15. 22 i -22
16. 320 y 80
17. Teatre: 25€, concert: 18€
18. 170 i 71
19. 80 i 320
20. 15 de 10€ i 37 de 5€
21. 25 de dobles i 42 de senzilles
22. 1800 litres d'1€ i 200 litres de 3€
23. 3 de tipus A i 22 de tipus B
24. 12 vegades a la sinya i 1 a la muntanya
25. 17 gallines i 60 ovelles
26. El nº 52
27. 9 i 15
28. 40 i 42
29. 10 i 3
30. 13, 19 i -13,-19
31. 11 i 7
32. Els catets 12 i 16, la hipotenusa 20
33. 72
34. 1 i 8
35. altura=12, base=10; àrea 60

Solucions de l'AUTOAVALUACIÓ

1. $x=0$, $x=-5$
2. $x=\pm 6$, $x=\pm 1$
3. $x=8$; $x=15$
4. $x=\pm 8$
5. $x=30$ $y=8$
6. $x=6$ $y=9$
 $x=2$ $y=1$
7. 23 y 24
8. 4 de 2 € y 10 de 0,50 €
9. 36 m x 20 m
10. $x^2 - 7x + 12=0$

Solucions 3 i 4

No us oblideu d'enviar les activitats al tutor o tutora ►