

## Objetivos

En esta quincena aprenderás a:

- Identificar los diferentes elementos presentes en la circunferencia y el círculo.
- Conocer las posiciones relativas de puntos, rectas y circunferencias.
- Conocer las propiedades de los ángulos construidos en la circunferencia.
- Medir longitudes y áreas de figuras circulares.

Antes de empezar

1. La circunferencia ..... pág. 154  
La circunferencia  
Elementos de la circunferencia
2. Posiciones relativas ..... pág. 156  
Punto y circunferencia  
Recta y circunferencia  
Dos circunferencias
3. Ángulos en la circunferencia ..... pág. 159  
Ángulo central  
Ángulo inscrito  
Ángulo inscrito en la semicircunferencia
4. Círculo y figuras circulares ..... pág. 161  
El círculo  
Figuras circulares  
Longitudes en la circunferencia  
Áreas en el círculo

Ejercicios para practicar

Para saber más

Resumen

Autoevaluación

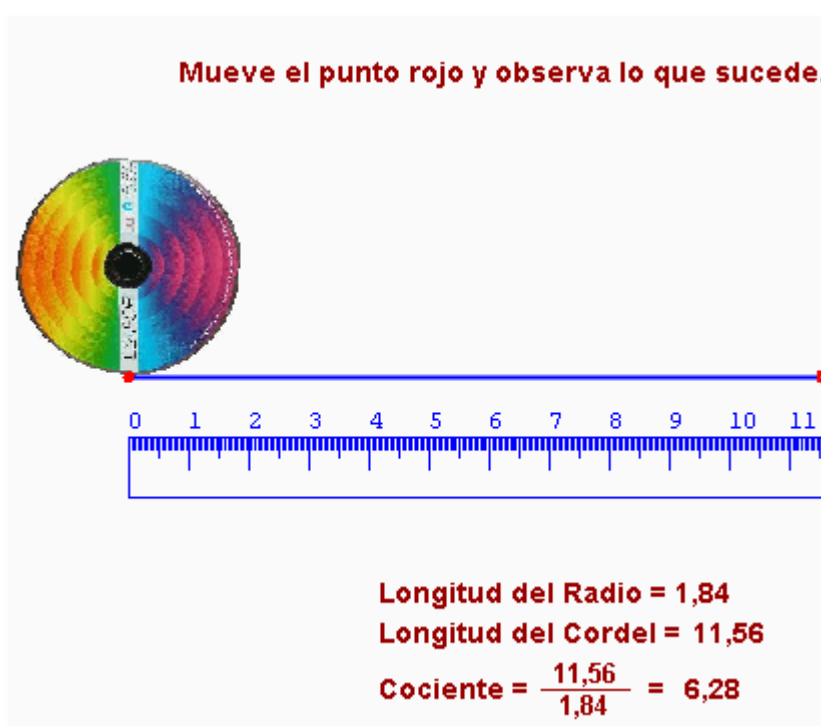
Actividades para enviar al tutor



## Antes de empezar

### Investiga

Construye un círculo de cartón y mide la distancia del centro al borde. Enrolla un trozo de cordel alrededor del contorno del círculo. Desenróllalo después y mídelo también. Divide la segunda cantidad entre la primera y anota el resultado. Puedes repetir el experimento con círculos de distintos tamaños. ¿Qué puedes decir de los resultados que se obtienen?



El disco de la figura tiene un cordel enrollado a lo largo de su borde exterior. Al desenrollar el cordel (en la figura aparece en azul), podremos medir su longitud. En este caso esta longitud es de 11,56 cm.

Al dividir la longitud del cordel entre el radio del círculo, que mide 1,84 cm, obtenemos como cociente 6,28.

No habría nada de particular en todo lo que acabamos de ver. Lo realmente sorprendente es que si repetimos el experimento con cualquier objeto redondo, obtendremos finalmente el mismo cociente ... ¡exactamente el mismo!

Este cociente debe ser, por tanto, una cantidad con entidad propia, es decir, una cantidad que tendrá una relación íntima y fundamental con la geometría del círculo.

# La circunferencia y el círculo

## 1. La circunferencia

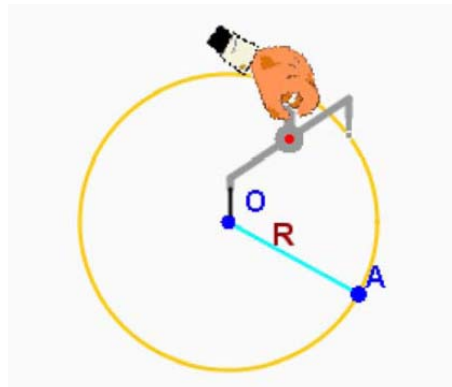
### La circunferencia.

Marca un punto  $O$  sobre un plano. Marca ahora otro punto  $A$  cualquiera y calcula la distancia entre  $O$  y  $A$ . Si buscas todos los puntos del plano que están a esa misma distancia del punto  $O$ , obtendrás una figura plana, que se conoce como **circunferencia**.

De manera más precisa, la **circunferencia** es una línea plana y cerrada formada por todos los puntos se encuentran a igual distancia de un punto  $O$  dado.

El punto  $O$  se llama **centro** de la circunferencia y la distancia entre el centro y cualquiera de los puntos de la circunferencia se llama **radio**.

La **circunferencia** es una línea plana y cerrada en la que todos los puntos están a **igual distancia** de un punto  $O$  dado.



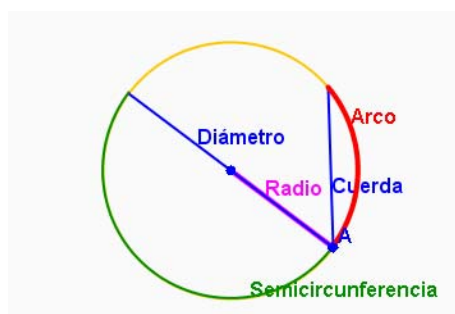
El compás es un instrumento necesario para el dibujo de circunferencias y círculos.

Para dibujar una circunferencia basta situar la aguja del compás sobre un punto y, con la abertura, deseada, girarlo. La abertura que hayamos dado al compás es el **radio** de la circunferencia.

### Elementos de la circunferencia.

En una circunferencia podemos distinguir los siguientes elementos:

- **Centro:** es el punto situado en su interior que se encuentra a la misma distancia de cualquier punto de la circunferencia.
- **Radio:** es el segmento que une cualquier punto de la circunferencia con el centro.
- **Cuerda:** es el segmento que une dos puntos cualesquiera de la circunferencia.
- **Diámetro:** es la cuerda que pasa por el centro de la circunferencia.
- **Arco:** es el segmento de circunferencia comprendido entre dos de sus puntos.
- **Semicircunferencia:** es el arco que abarca la mitad de la circunferencia.



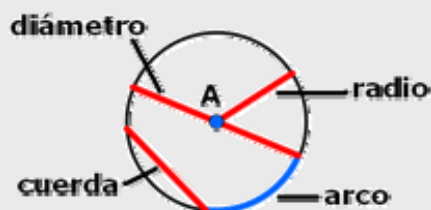
Traza una circunferencia de centro  $O$  y radio  $R=1,5$

El diámetro tiene **longitud doble** que el radio.

## EJERCICIOS resueltos

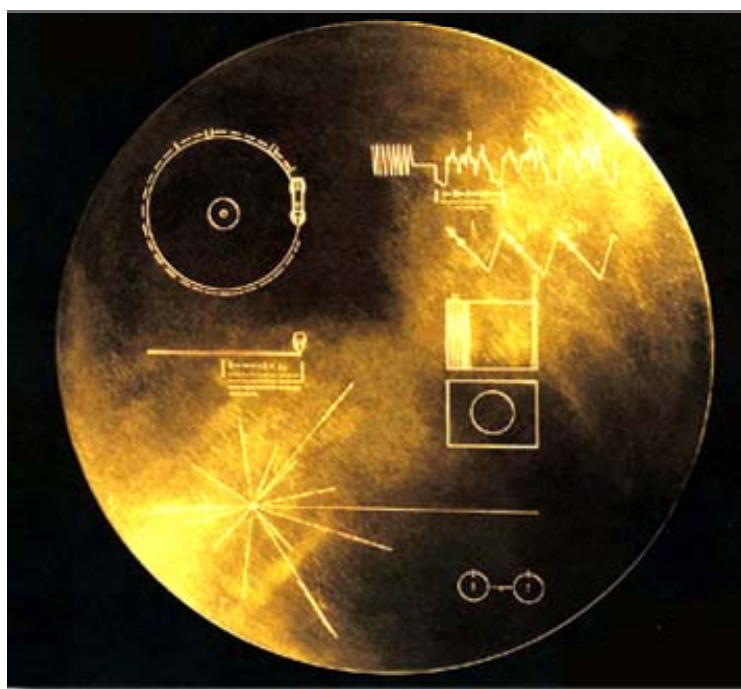
1. Dibuja con regla y compás una circunferencia de 3 cm de radio con centro en el punto A y traza sobre ella los siguientes elementos: un radio, un diámetro, una cuerda y un arco.

Sol Usa los instrumentos de dibujo para obtener un resultado similar a este:



2. Identifica en la figura el nombre de los distintos elementos que aparecen coloreados en rojo.

Sol



# La circunferencia y el círculo

## 2. Posiciones relativas

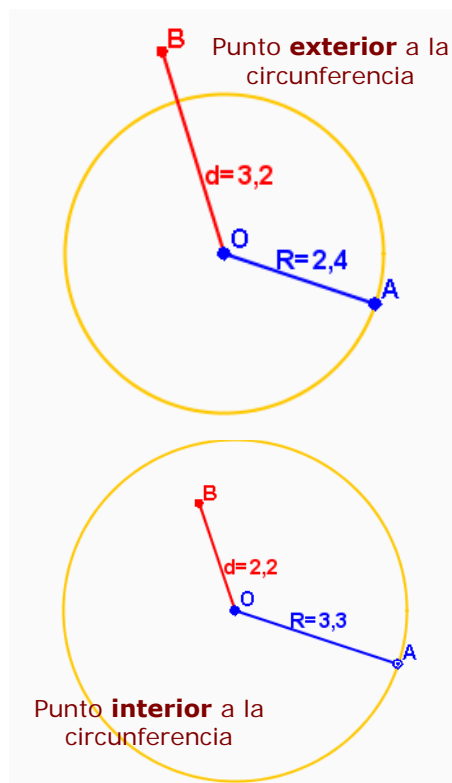
### Punto y circunferencia.

Entre un punto y una circunferencia pueden producirse distintas situaciones a las que llamamos **posiciones relativas**.

Decimos que el punto es **exterior** a la circunferencia si se encuentra a una distancia del centro **mayor** que el radio. En este caso el punto está fuera de la circunferencia. El punto es **interior** si se encuentra a una distancia del centro **menor** que el radio. El punto está entonces dentro de la circunferencia.

Si el punto está situado sobre la circunferencia decimos que **pertenece** a ella. En este caso la distancia al centro es **igual** al radio.

Un punto que no pertenezca a la circunferencia puede ser **interior** o **exterior** a ella.



### Recta y circunferencia.

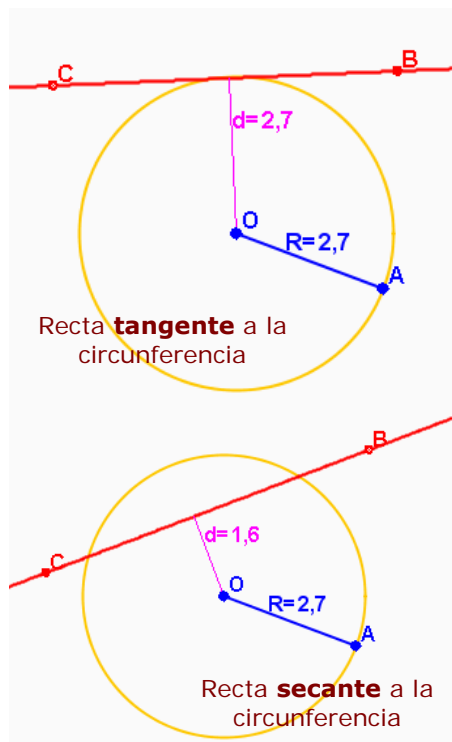
Igual que hemos hecho con puntos, podemos estudiar la posición relativa de una recta y una circunferencia. Se pueden dar los siguientes casos.

Si la recta no tiene **ningún punto en común** con la circunferencia, decimos que son **exteriores**.

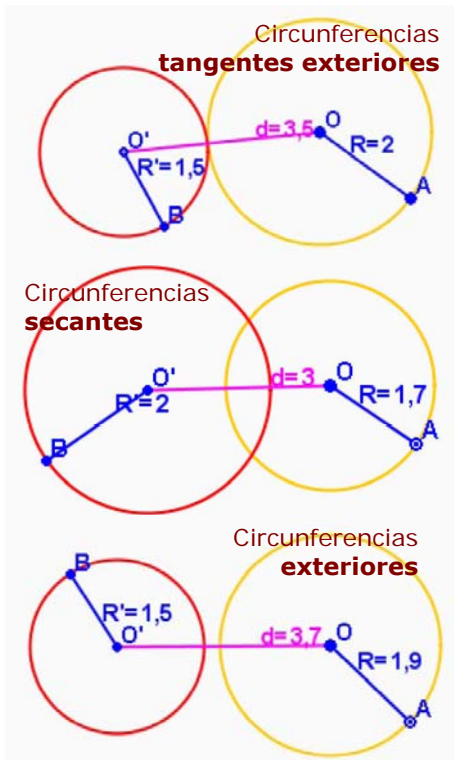
Si tienen **un punto en común**, decimos que la recta y la circunferencia son **tangentes**. En este caso la recta es **perpendicular** al radio.

Si tienen **dos puntos comunes**, entonces decimos que la recta y la circunferencia son **secantes**.

Llamamos **tangente** a la recta que tiene un sólo punto en común con la circunferencia.



# La circunferencia y el círculo



## Dos circunferencias.

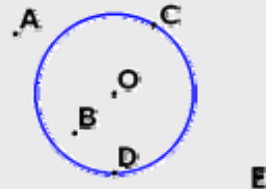
Entre dos circunferencias se pueden producir las siguientes posiciones relativas.

- **Exteriores:** todos los puntos de cada circunferencia son exteriores a la otra.
- **Interiores:** todos los puntos de una de las circunferencias son interiores a la otra. Si además tienen el mismo centro, decimos que son concéntricas.
- **Tangentes:** tienen un punto en común. Serán tangentes **exteriores** o tangentes **interiores**, dependiendo de la posición de los puntos que no son comunes a ambas.
- **Secantes:** tienen dos puntos en común y cada circunferencia divide a la otra en dos arcos.

## EJERCICIOS resueltos

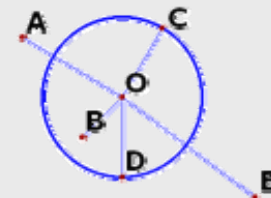
3. Indica si los siguientes puntos son interiores, exteriores o pertenecen a la circunferencia.

Sol A y E son exteriores; O y B son interiores; C y D pertenecen a la circunferencia.



4. Indica cuáles de los puntos están a igual distancia del centro, cuáles se encuentran a una distancia del centro mayor que el radio, cuáles están a distancia menor que el radio y cuáles están a una distancia equivalente al doble del radio.

Sol Los puntos C y D están situados a igual distancia del centro O; A y E están situados a mayor distancia que el radio; B está situado a menor distancia que el radio; E está situado a una distancia doble del radio.



5. Indica la posición relativa de las rectas que aparecen en la figura, con respecto a la circunferencia.

Sol Las rectas t y s son secantes; u es exterior a la circunferencia; v es tangente.



## EJERCICIOS resueltos

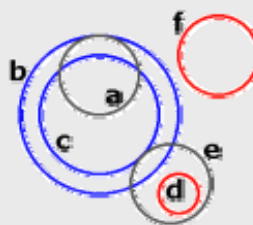
6. Representa sobre la figura la distancia de cada una de las rectas al centro de la circunferencia e indica en qué casos esa distancia es mayor que el radio, en qué casos es menor y en cuáles es igual que el radio.

Sol La distancia de la recta  $u$  al centro es mayor que el radio; la distancia de  $t$  al centro es menor que el radio; la distancia de  $v$  al centro es igual que el radio; la distancia de  $s$  al centro es nula.



7. Indica la posición relativa de los pares de circunferencias que aparecen en la figura:  $a$  y  $b$ ,  $a$  y  $c$ ,  $b$  y  $c$ ,  $c$  y  $f$ ,  $e$  y  $d$ ,  $e$  y  $b$ ,  $a$  y  $d$ ,  $c$  y  $e$

Sol Las circunferencias  $a$  y  $b$  son tangentes interiores;  $a$  y  $c$  son secantes;  $b$  y  $c$  son interiores concéntricas;  $c$  y  $f$  son exteriores;  $e$  y  $d$  son interiores;  $e$  y  $b$  son secantes;  $a$  y  $d$  son de  $v$  al centro es igual que el radio; la distancia de  $s$  al centro es nula.



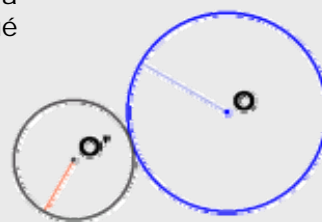
8. Dibuja dos circunferencias de radios 5 cm y 3 cm respectivamente que sean tangentes interiores. ¿A qué distancia se encuentran sus centros?

Sol La distancia entre los centros es de 2 cm.



9. Dibuja las mismas circunferencias anteriores, pero esta vez en posición de tangentes exteriores. ¿A qué distancia se encuentran ahora sus centros?

Sol Sus centros están a 8 cm de distancia.



10. Dos circunferencias tienen radios 3 y 4 cm respectivamente, y sus centros se encuentran a una distancia de 9 cm. ¿Cuál es su posición relativa?

Sol Son circunferencias exteriores.



## 3. Ángulos en la circunferencia

### Ángulo central.

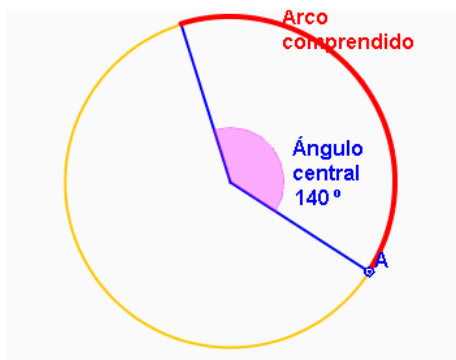
Se llama **ángulo central** a cualquier ángulo que tenga su **vértice** en el centro de la circunferencia.

Todo ángulo central corta a la circunferencia en dos puntos que determinan un arco comprendido.

Así, un ángulo de  $360^\circ$  comprende a la circunferencia completa, un ángulo de  $180^\circ$  divide a la circunferencia en dos arcos iguales y un ángulo recto comprende un arco que es la mitad de una semicircunferencia.

De esta manera es posible identificar cada **ángulo central** con su **arco** de circunferencia correspondiente.

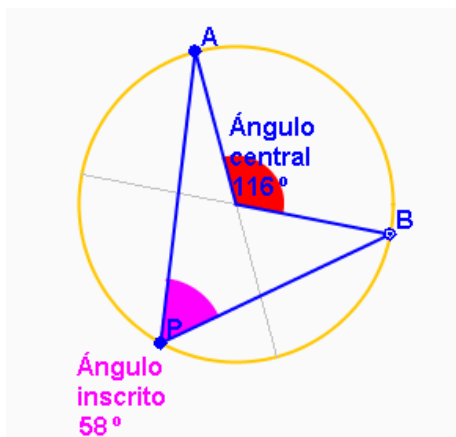
Todo ángulo central determina un **arco** sobre la circunferencia.



El ángulo central de la figura se corresponde con el arco de circunferencia dibujado en rojo.

Es posible establecer esta correspondencia entre cualquier ángulo central y su arco de circunferencia, o bien, en sentido contrario, entre cualquier arco y su ángulo central.

Por esta razón, podemos hablar de la **amplitud del arco**, que en este caso es de  $140^\circ$ .



El ángulo inscrito con vértice en el punto P es la mitad del ángulo central AOB.

De tal manera que si movemos el punto P a lo largo de la circunferencia, el ángulo APB tendrá siempre la misma amplitud, ya que seguirá siendo en todos los casos la mitad del ángulo central.

### Ángulo inscrito.

Se llama **ángulo inscrito** al ángulo que tiene su vértice P en la circunferencia, de forma que sus lados son **secantes** con la circunferencia.

Si A y B son los puntos en que los lados del ángulo inscrito APB cortan a la circunferencia y consideramos el ángulo central AOB que queda determinado por los puntos A y B, resulta entonces que este ángulo central AOB tiene amplitud doble que el ángulo inscrito APB.

Sabemos así que la amplitud de cualquier ángulo **inscrito** es la **mitad** de la amplitud del ángulo **central** correspondiente.

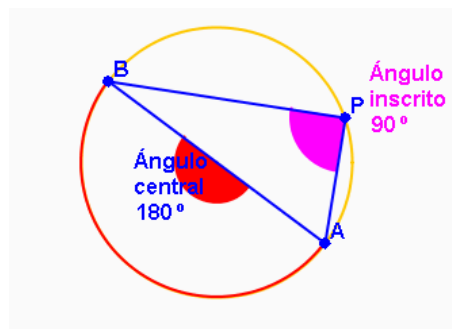
La amplitud de cualquier ángulo inscrito es la **mitad** de la amplitud del ángulo central correspondiente..

# La circunferencia y el círculo

## Ángulo inscrito en la semicircunferencia.

Como consecuencia de la relación existente entre las amplitudes de los ángulos centrales y sus correspondientes ángulos inscritos, es resulta fácil obtener la amplitud de un **ángulo inscrito en una semicircunferencia**.

Un diámetro de la circunferencia determina una semicircunferencia, que se corresponde con un ángulo central de  $180^\circ$  (llano). Así, cualquier ángulo inscrito determinado por el diámetro tendrá una amplitud que es la mitad del ángulo llano. Por lo tanto, todo **ángulo inscrito en una semicircunferencia** es un ángulo **recto**.

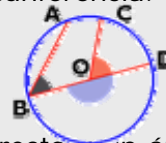


A un ángulo central corresponde un ángulo inscrito que es la mitad. Por este motivo, si el ángulo central es llano, el inscrito será recto.

## EJERCICIOS resueltos

11. Identifica los siguientes tipos de ángulos, por su posición en la circunferencia.

Sol El ángulo ABD es un ángulo inscrito en la circunferencia; los ángulos COD y BOD son ángulos centrales.



12. Representa sobre la circunferencia de la figura un ángulo central recto y un ángulo inscrito que se corresponda con él. Calcula la amplitud del ángulo inscrito, sin medirlo con el transportador.

Sol El ángulo inscrito es la mitad que su correspondiente ángulo central. Como el ángulo central es recto, el inscrito será de  $45^\circ$ .



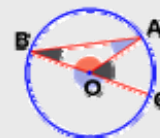
13. Representa sobre la circunferencia de la figura un ángulo inscrito recto y su correspondiente ángulo central. Calcula la amplitud del ángulo central, sin medirlo con el transportador.

Sol El ángulo central tiene amplitud doble que su correspondiente ángulo inscrito, por lo que su amplitud será un ángulo llano.



14. En la siguiente figura indica la amplitud de los ángulos señalados, sin utilizar el transportador, sabiendo que el ángulo AOC mide  $54^\circ$ .

Sol El ángulo ABC es el inscrito correspondiente con AOC, así que su amplitud será  $27^\circ$ ; AOB mide  $136^\circ$  por ser el suplementario de AOC; BAO mide  $27^\circ$  porque el triángulo ABO es isósceles; BOC es un ángulo llano.

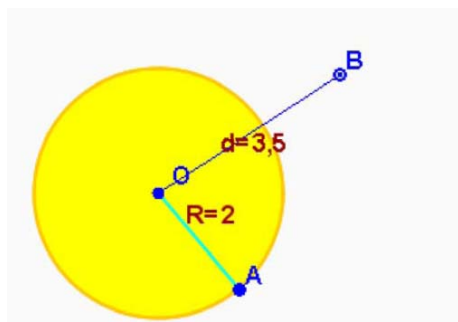


15. Si partimos una empanada en 18 trozos iguales, ¿qué ángulo corresponde a cada ración? ¿En cuántos trozos habría que cortarla para que cada ración fuese de  $30^\circ$ ?

Sol Para partirla en 18 trozos haremos  $\frac{360^\circ}{18} = 20^\circ$  cada ración; si queremos que las raciones sean de  $30^\circ$ , tendremos  $\frac{360^\circ}{30^\circ} = 12$  raciones.

## 4. Círculo y figuras circulares

### El círculo.



Si la distancia al centro es mayor que el radio, el punto será exterior al círculo.

Llamamos **círculo** a la región plana encerrada por una circunferencia. De forma más precisa, si  $O$  es el centro de la circunferencia, el círculo es la región del plano formada por todos los puntos cuya **distancia** al centro  $O$  es **menor o igual** que el **radio** de la circunferencia.

Así, el círculo comprende a todos los puntos de la circunferencia y también a todos los puntos interiores a ella. La circunferencia es por lo tanto el **contorno**, la "frontera" del círculo.

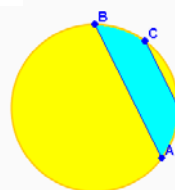
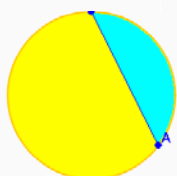
Se llaman centro, radio y diámetro del círculo al centro, radio y diámetro de su circunferencia.

El **círculo** está formado por la **circunferencia** y todos los puntos **interiores** a ella.



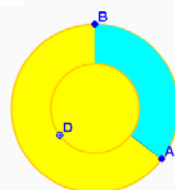
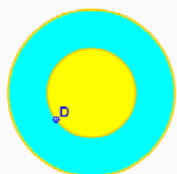
Sector circular

Segmento circular



Zona circular

Corona circular



Trapecio circular

### Figuras circulares.

Es posible determinar en un círculo varias figuras geométricas de interés.

Se llama **sector circular** a la región del círculo determinada por dos radios.

Se llama **segmento circular** a la región del círculo determinada por una cuerda. La región delimitada por dos cuerdas paralelas se llama **zona circular**.

La región determinada por dos circunferencias concéntricas se denomina **corona circular**. Si cortamos una corona circular por dos radios, obtenemos una figura llamada **trapecio circular**.

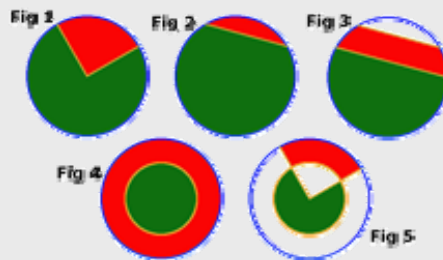
Los radios, cuerdas y circunferencias concéntricas determinan diversas **figuras circulares**.

# La circunferencia y el círculo

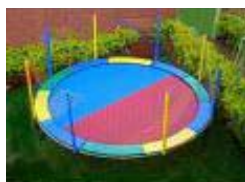
## EJERCICIOS resueltos

16. Identifica por su nombre los elementos que aparecen representados en rojo y verde en las figuras adjuntas.

- Sol Fig 1 verde ..... sector circular  
 roja ..... sector circular  
 Fig 2 verde ..... segmento circular  
 roja ..... segmento circular  
 Fig 3 verde ..... segmento circular  
 roja ..... zona circular  
 Fig 4 verde ..... círculo  
 roja ..... corona circular  
 Fig 5 verde ..... sector circular  
 roja ..... trapecio circular



Los sectores circulares, coronas, semicírculos y demás elementos están presentes en toda clase de objetos de distinta naturaleza.



## Longitudes en la circunferencia.

En cualquier circunferencia, al dividir su longitud entre el diámetro, se obtiene una cantidad fija algo mayor que tres.

Esa **división** da siempre **3,1415926 ...**

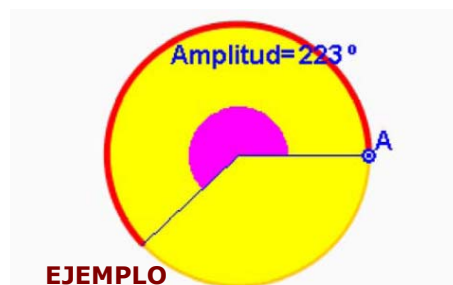
Este número se designa por la letra griega  $\pi$  (pi) y tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

Si  $L$  es la longitud de la circunferencia y  $D$  el diámetro, tenemos  $L = \pi \cdot D$ . Como el diámetro es doble del radio  $R$ , la longitud de la circunferencia será:

$$L = 2 \cdot \pi \cdot R$$

Para hallar la longitud del arco de circunferencia, hacemos corresponder el perímetro  $2 \cdot \pi \cdot R$  con la amplitud  $360^\circ$ . Y por **proporcionalidad directa**, si  $n$  es la amplitud del arco, resulta

$$L_{\text{arco}} = \frac{n \cdot 2 \cdot \pi \cdot R}{360}$$



Para calcular la longitud  $L_{\text{arco}}$  del arco de  $223^\circ$  expresamos la siguiente proporción:

$$\begin{matrix} L_{\text{arco}} & \rightarrow & 223^\circ \\ L_{\text{circunf}} & \rightarrow & 360^\circ \end{matrix} \text{ así que } \frac{L_{\text{arco}}}{L_{\text{circunf}}} = \frac{223^\circ}{360^\circ}$$

y de aquí obtenemos que la longitud del arco es  $L_{\text{arco}} = \frac{223^\circ}{360^\circ} \cdot L_{\text{circunf}}$

Como la longitud de la circunferencia es  $L_{\text{circunf}} = 2 \cdot \pi \cdot 2,58$ , ya podemos conocer la longitud del arco que buscábamos.

## EJERCICIOS resueltos

- 17.** Calcula la longitud de una circunferencia que tiene 20 cm de radio.

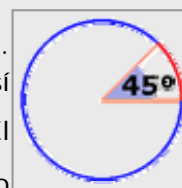
Sol La longitud es  $L = 2 \cdot \pi \cdot 20 = 125,66$  cm.

- 18.** Calcula la longitud de dos circunferencia que tienen 30 cm de diámetro, la primera, y 15 cm de radio la segunda.

Sol El radio de la primera es la mitad del diámetro, es decir, 15 cm. Por tanto ambas tienen el mismo radio y su longitud es  $L = 2 \cdot \pi \cdot 15 = 94,25$  cm.

- 19.** Calcula la longitud de la circunferencia y de los arcos marcados en azul y rojo, sabiendo que su radio es 3 cm.

Sol La circunferencia tienen una longitud de  $L = 2 \cdot \pi \cdot 3 = 18,85$  cm. El ángulo de  $45^\circ$  es la octava parte de la circunferencia, así que el arco rojo tiene longitud  $L_{\text{arco rojo}} = \frac{18,85}{8} = 2,36$  cm. El arco azul es la diferencia entre la circunferencia y el arco rojo:  $L_{\text{arco azul}} = 18,85 - 2,36 = 16,49$  cm.



- 20.** Calcula la longitud del arco correspondiente a un ángulo de  $180^\circ$  en una circunferencia de radio 1. Calcula también las longitudes de los arcos de  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $270^\circ$ .

Sol La circunferencia de radio 1 tienen longitud  $L = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$  y el arco de  $180^\circ$  es una semicircunferencia, así que su longitud será la mitad:  $L_{\text{semicirc}} = \pi = 3,14$ . Los arcos de  $30^\circ$ ,  $90^\circ$  y  $270^\circ$  son la duodécima, cuarta y tres cuartas partes de la circunferencia, respectivamente, así que sus longitudes son:

$$L_{\text{arco } 30^\circ} = \frac{1}{12} \cdot 2 \cdot \pi = 0,52, \quad L_{\text{arco } 90^\circ} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 1,57, \quad L_{\text{arco } 270^\circ} = \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot \pi = 4,71.$$

- 21.** Calcula el radio de una circunferencia sabiendo que tiene una longitud de 25,13 cm.

Sol El radio será  $R = \frac{25,13}{2 \cdot \pi} = 4$  cm.

- 22.** Calcula el radio de una circunferencia sabiendo que a un ángulo de  $60^\circ$  le corresponde un arco de 10 cm. ¿Y si fuese un ángulo de  $203^\circ$  al que corresponde un arco de 15 cm?

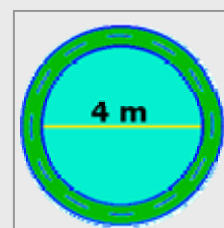
Sol El ángulo de  $60^\circ$  es la sexta parte de la circunferencia, así que la longitud de la circunferencia completa es 60 cm y su radio será  $R = \frac{60}{2 \cdot \pi} = 9,55$  cm. Para el

arco de  $203^\circ$ , tenemos que  $L_{\text{arco}} = \frac{n}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$ , de donde  $15 = \frac{203}{360} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R$  y de

$$\text{aquí } R = \frac{360 \cdot 15}{2 \cdot \pi \cdot 203} = 4,23 \text{ cm.}$$

- 23.** Una piscina circular de 4 m de diámetro está rodeada por una acera de 1 m de anchura. ¿Cuál será la longitud de la acera si la medimos exactamente por la mitad de su anchura?

Sol Como la anchura de la acera es de 1 m, justo por la mitad tendremos una circunferencia de radio  $2 + 0,5 = 2,5$  m. La longitud entonces será  $L = 2 \cdot \pi \cdot 2,5 = 15,71$  cm.



# La circunferencia y el círculo

## Áreas en el círculo.

✓ El **área** de un **círculo** se puede hallar considerándolo como un polígono regular de "muchos" lados, en el cual el apotema coincide con el radio.

$$\text{Área de un polígono regular} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$\text{Que se convierte en } \frac{2 \cdot \pi \cdot R \cdot R}{2} = \pi \cdot R^2$$

Obtenemos así la fórmula que nos da el área a partir del radio.

$$\text{Área} = \pi \cdot R^2$$

✓ El **área** de un **sector circular** de amplitud  $n$ , se calcula utilizando la proporcionalidad directa, con lo que resulta la fórmula:

$$A_{\text{sector}} = \frac{n \cdot \pi \cdot R^2}{360}$$

### EJEMPLO

Para calcular el área  $A_{\text{sector}}$  del sector de  $126^\circ$  de un círculo de radio 2,5 cm, expresamos la siguiente proporción:

$$\begin{array}{l} A_{\text{sector}} \rightarrow 126^\circ \\ A_{\text{circ}} \rightarrow 360^\circ \end{array} \text{ así que } \frac{A_{\text{sector}}}{A_{\text{circ}}} = \frac{126^\circ}{360^\circ}$$

y de aquí obtenemos que el área del sector es

$$A_{\text{sector}} = \frac{126^\circ}{360^\circ} \cdot A_{\text{circ}}$$

Como el área del círculo es  $A_{\text{circ}} = \pi \cdot 2,5^2$ , ya podemos conocer el área del sector que buscábamos.

✓ Para calcular el **área** de la **corona circular** se restan las áreas de las circunferencias mayor y menor:

$$A_{\text{corona}} = \pi \cdot (R^2 - r^2)$$

donde  $R$  y  $r$  son los radios mayor y menor de la corona.

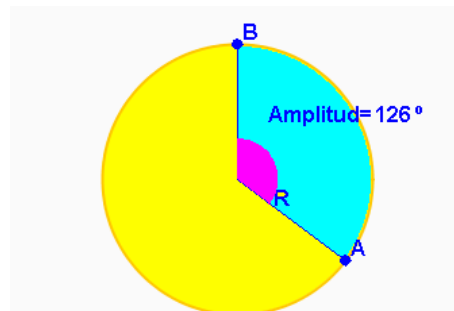
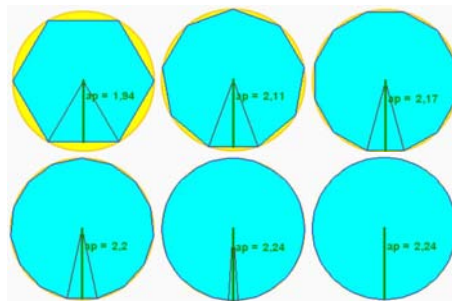
### EJEMPLO

Para calcular el área  $A_{\text{corona}}$  de la corona circular de radio mayor 3,5 y radio menor 1,75 calcularemos el área de cada una de las dos circunferencias:

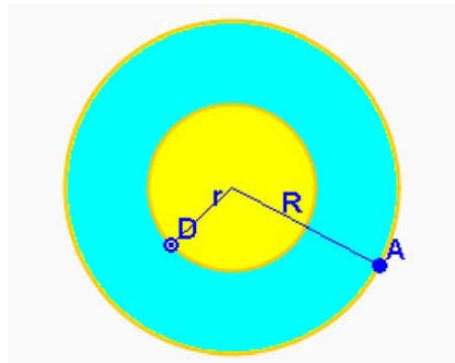
$$A_{\text{mayor}} = \pi \cdot R^2 = \pi \cdot 3,5^2 \text{ y } A_{\text{menor}} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1,75^2$$

Restando ambas áreas obtenemos:

$$A_{\text{corona}} = \pi \cdot 3,5^2 - \pi \cdot 1,75^2 = \pi \cdot (3,5^2 - 1,75^2) = 28,86$$



$$A_{\text{sector}} = \frac{126 \cdot \pi \cdot 2,5^2}{360} = 27,74 \text{ cm}^2$$



$$A_{\text{corona}} = \pi \cdot (3,5^2 - 1,75^2) = 28,86 \text{ cm}^2$$

## EJERCICIOS resueltos

24. Calcula el área de un círculo de 5 cm de radio.

Sol El área es  $A = \pi \cdot 5^2 = 78,54 \text{ cm}^2$ .

25. Calcula el área de dos círculos de 10 cm y de 20 cm de diámetro, respectivamente.

Sol Las áreas son  $A_1 = \pi \cdot 5^2 = 78,54$  y  $A_2 = \pi \cdot 10^2 = 314,16 \text{ cm}^2$ . Es importante notar que si una circunferencia tiene radio doble que otra, su área no es el doble sino el cuádruple de la primera.

26. Calcula el área de las figuras circulares coloreadas.

**Nota: El radio de las circunferencias exteriores es 2 cm en todos los casos y el de las interiores es 1,2 cm.**



Sol Fig 1  $A_{\text{sector rojo}} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 4,19 \text{ cm}^2$ ,  $A_{\text{sector azul}} = \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot 2^2 = 8,38 \text{ cm}^2$ ;

Fig 2  $A_{\text{corona}} = \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 8,04 \text{ cm}^2$ ,  $A_{\text{semicirc}} = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 2,26 \text{ cm}^2$ ;

Fig 3  $A_{\text{trap rojo}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 2,01 \text{ cm}^2$ ,  $A_{\text{trap azul}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 6,03 \text{ cm}^2$ ;

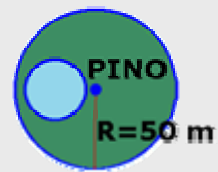
$A_{\text{sector rojo}} = \frac{3}{4} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 3,39 \text{ cm}^2$ ,  $A_{\text{sector azul}} = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 1,13 \text{ cm}^2$ ;

Fig 4  $A_{\text{sector rojo}} = \frac{260}{360} \cdot \pi \cdot 1,2^2 = 3,27 \text{ cm}^2$ ,  $A_{\text{trap azul}} = \frac{100}{360} \cdot \pi \cdot (2^2 - 1,2^2) = 2,23 \text{ cm}^2$ .

27. ¿Cuál es el perímetro de un círculo de área  $25 \text{ cm}^2$ ?

Sol El radio es  $R = \sqrt{\frac{25}{\pi}} = 2,82$  y el perímetro  $L = 2 \cdot \pi \cdot 2,82 = 17,72 \text{ cm}$ .

28. Se quiere construir una piscina redonda en una finca circular de 50 m de diámetro, conservando un pino que hay en el centro. Calcula el diámetro máximo de la piscina y la superficie de finca que quedará después de la obra.



Sol El radio será  $R = \frac{25,13}{2 \cdot \pi} = 4 \text{ cm}$ .

29. El segundero de un reloj mide 2 cm. Calcula la longitud del arco que describe esta aguja al cabo de 20 segundos.

Sol Describe un arco de  $120^\circ$ , de longitud  $L = 2 \cdot \pi \cdot 2 = 12,57 \text{ cm}$ .

30. Si el minutero de un reloj mide 4 cm, calcula el área del sector circular que describe esta aguja entre las 3:20 y las 4:00. Calcula el área del sector que describe en el mismo intervalo de tiempo la aguja horaria, que mide 3 cm.

Sol El minutero avanza  $240^\circ$  y barre un área de  $A_{\text{minutero}} = \frac{240}{360} \pi \cdot 4^2 = 33,51 \text{ cm}^2$ .

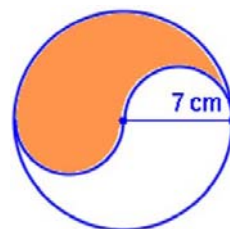
La aguja horaria avanza  $20^\circ$  y el área es  $A_{\text{horaria}} = \frac{20}{360} \pi \cdot 3^2 = 1,57 \text{ cm}^2$ .

# La circunferencia y el círculo



## Para practicar

1. En una circunferencia de radio 7,6 ¿cuál es la distancia entre el centro de la circunferencia y cualquiera de sus puntos? ¿Cuánto mide el diámetro de la circunferencia?
2. En una circunferencia de radio 4,6 ¿es posible trazar una cuerda de longitud 9,6?
3. Si una circunferencia tiene longitud 45 y un arco tiene longitud 25 ¿qué amplitud tendrá el ángulo central correspondiente a ese arco?
4. Si una recta se encuentra a distancia 2,8 del centro de una circunferencia de radio 8,8 ¿cuáles son sus posiciones relativas?
5. Si los centros de dos circunferencias están a una distancia de 9,9 y una de ellas tiene radio 2,1 ¿cómo deberá ser el radio de la otra para que sean exteriores?
6. Si el ángulo central de una circunferencia tiene una amplitud de  $160^\circ$  ¿cuál será la amplitud del ángulo inscrito correspondiente?
7. ¿Cuál será la amplitud del ángulo central si sabemos que su correspondiente ángulo inscrito tiene amplitud  $27^\circ$ ? ¿Qué figura se forma cuando el ángulo inscrito es recto?
8. Calcula la longitud de una circunferencia de radio 3,4 y el área del círculo correspondiente. Calcula la longitud del arco de amplitud  $241^\circ$  y el área del sector correspondiente.
9. Calcula el radio interior de una corona circular sabiendo que su radio exterior es 7 y su área 125,6.
10. Calcula el área y el perímetro de una ventana formada por un rectángulo de 1,6 m de anchura y doble altura, coronada por un semicírculo.
11. Calcula el área y el perímetro de la figura naranja



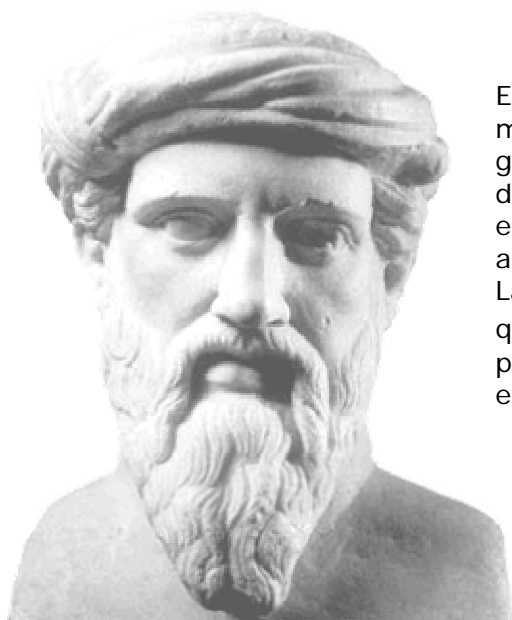
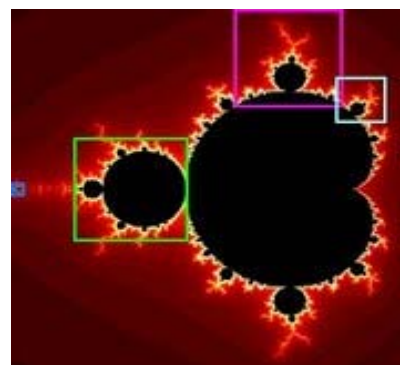


Para saber más



## La importancia de un número.

**E**l número  $\pi$  ha sido una de las primeras y más importantes empresas científicas de toda la historia. Desde los inicios de la geometría era conocida la relación que existe entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. El cociente entre ambas magnitudes es precisamente  $\pi$ , que toma su nombre de Pitágoras.



El problema estaba en obtener el valor exacto de este misterioso número y desde las épocas egipcia y griega se fueron dando distintas aproximaciones. Una de estas aproximaciones es la fracción  $22/7$  y tras ella fueron apareciendo otras, cada vez más cercanas al valor exacto. En 1768 el suizo Johann Heinrich Lambert demostró algo que se venía sospechando: que  $\pi$  no es un número racional, esto es, que no se puede obtener como el cociente de dos números enteros.

Pero el número quizá más famoso de la historia, es aún más especial: resultó ser que  $\pi$  no es tampoco un número algebraico. Esto quiere decir que no existe ninguna ecuación construida con las operaciones básicas de sumar, restar, multiplicar y elevar a una potencia, que tenga como solución el número  $\pi$ , como logró demostrar el alemán Lindemann en 1882. En la actualidad, sabido ya que  $\pi$  es un número compuesto por infinitas cifras decimales no periódicas, existen proyectos para determinar sus cifras, de las que ya se conocen varios millones. ¡Si tienes tiempo ... ya sabes!



# La circunferencia y el círculo



## Recuerda lo más importante

### La circunferencia y sus elementos.

La **circunferencia** es una figura plana en la que todos sus puntos están a la **misma distancia** del **centro**. Sus elementos más importantes son:

- el **centro**
- el **radio**
- la **cuerda**
- el **diámetro**
- el **arco**
- la **semicircunferencia**

Distinguimos distintas **posiciones relativas** de puntos, rectas y circunferencias.

Existe una relación fundamental entre un **ángulo central** y su correspondiente **ángulo inscrito**: la amplitud del primero es **doble** de la del segundo.

Como consecuencia de lo anterior, todo ángulo inscrito en una semicircunferencia es recto.

### El círculo y sus elementos. Longitudes y áreas.

El **círculo** es la figura plana formada por una circunferencia y todos los **puntos interiores** a ella. Las figuras circulares son:

- el **sector** circular
- el **segmento** circular
- la **zona** circular
- la **corona** circular
- el **trapecio** circular

Si  $R$  es la longitud del **radio** podemos obtener el **perímetro** y el **área** del círculo:

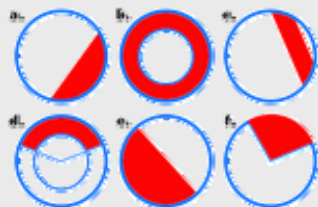
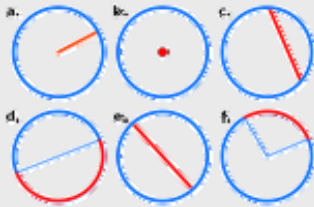
- el perímetro es  $L = 2 \cdot \pi \cdot R$
- el área es  $A = \pi \cdot R^2$

Estas fórmulas y la **proporcionalidad directa** nos permiten conocer la **longitud** de **arcos** y las **áreas** de **sectores**, **coronas** y **trapecios** circulares.



# La circunferencia y el círculo

## Autoevaluación



1. Relaciona el elemento de la circunferencia marcado en rojo con su nombre correspondiente.
2. Indica la posición relativa de un punto situado a distancia 9,2 del centro de una circunferencia de radio 6,8.
3. Indica la posición relativa de una recta situada a distancia 6,8 del centro de una circunferencia de radio 7,6.
4. Indica la posición relativa de dos circunferencias de radios 5,7 y 0,9 y cuyos centros están situados a una distancia de 4,8.
5. ¿Cuál es la amplitud del ángulo inscrito en una circunferencia sabiendo que su correspondiente ángulo central es de  $224^\circ$ ?
6. Identifica por su nombre las figuras circulares representadas en rojo.
7. Calcula la longitud del arco que abarca un ángulo de  $145^\circ$  en una circunferencia de radio 9,6.
8. ¿Cuál será el radio de una circunferencia sabiendo que el área del sector circular de amplitud  $154^\circ$  es de 71,6?
9. Calcula el área de un camino de 3 metros de anchura y que rodea a un jardín de forma circular de 7,9 metros de diámetro.
10. Calcula la distancia que recorre una velocista al dar 26 vueltas a un circuito como el de la figura.

# La circunferencia y el círculo

## Soluciones de los ejercicios para practicar

1. El radio:  $R = 7,6$ .  
 $D = 15,2$ .
2. No es posible trazar en una circunferencia cuerdas mayores que el diámetro, que en este caso es  $9,2$ .
3. Como la longitud es directamente proporcional al ángulo resulta:  
 $\alpha \rightarrow 25$   
 $360^\circ \rightarrow 45'$ , así que el ángulo central será  $\alpha = \frac{25}{45} \cdot 360^\circ = 200^\circ$
4. Al ser la distancia menor que el radio la recta y la circunferencia son secantes.
5. El radio de la otra deberá ser menor que la diferencia  $9,9 - 2,1$ :  $R < 7,8$
6. El ángulo inscrito será la mitad de  $160^\circ$ , es decir  $80^\circ$ .
7. La amplitud del ángulo central es el doble de  $27^\circ$ , es decir,  $54^\circ$ . En el caso de que el ángulo inscrito sea recto, el central será llano y se forma un triángulo rectángulo.
8. La longitud es  $L = 2 \cdot \pi \cdot 3,4 = 21,36$  y el área  $A = \pi \cdot 3,4^2 = 36,32$ . El arco tiene longitud  $L_{\text{arco}} = \frac{241}{360} \cdot 21,36 = 14,30$  y el área del sector es  $A_{\text{sector}} = \frac{241}{360} \cdot 36,32 = 24,31$ .
9. El área de la corona es la diferencia entre las áreas de los dos círculos y como el área del círculo exterior es  $153,86$ , el área de la interior debe ser  $28,26$  y por lo tanto el radio interior es  $r = \sqrt{\frac{28,26}{\pi}} = 3$ .
10. El rectángulo mide  $1,6$  de anchura y  $3,2$  de altura y el radio del semicírculo superior es  $0,8$ . Con estos valores el perímetro es  $P = 1,6 + 2 \cdot 3,2 + \pi \cdot 0,8^2 = 10,51$  m y el área  $A = 1,6 \cdot 3,2 + \frac{\pi \cdot 0,8^2}{2} = 6,12$  m<sup>2</sup>.
11. El área es la mitad del área del círculo  $\pi \cdot 7^2 = 153,86$  cm<sup>2</sup>, la mitad  $76,93$  cm<sup>2</sup>. El perímetro  $\pi \cdot 2 + 2\pi \cdot 3,5 = 43,96$  cm

## Soluciones AUTOEVALUACIÓN

1. a. radio, b. centro, c. cuerda, d. semicircunferencia, e. diámetro, f. arco.
2. El punto es exterior a la circunferencia.
3. La recta y la circunferencia son secantes.
4. La circunferencia menor  $0,9$  es tangente interior a la circunferencia mayor.
5.  $\frac{224^\circ}{2} = 112^\circ$
6. a. segmento, b. corona, c. zona, d. trapecio, e. semicírculo, f. sector.
7. La longitud del arco es  $24,29$ .
8. El radio es  $7,30$ .
9. El área es  $177,19$  m<sup>2</sup>.
10. La distancia recorrida es de  $4\,923,89$  m.

No olvides enviar las actividades al tutor ►

**NOTA IMPORTANTE:** En la resolución de los ejercicios de esta quincena se ha utilizado el valor de  $\pi$  aproximado a dos cifras decimales, es decir,  $\pi \approx 3,14$ . Los cálculos y resultados se dan también redondeados a dos cifras decimales.